ABOUT THE ORDER OF STABILITY OF THE CONTINUOUS BLOCK BACKWARD DIFFERENCE FORMULA METHODS

Dinh Van Tiep*, Pham Thi Thu Hang
TNU - University of Technology

ARTICLE INFO

Received: 10/8/2021

Revised: 27/8/2021

Published: 27/8/2021

KEYWORDS

Backward difference formula
Block multistep methods
Ordinary differential equations
Order of stability
Stability polynomial

ABSTRACT

This article aims to present two important and nice properties for the stability of the continuous block backward difference formula used to solve the initial value problems for ordinary differential equations. These results are extensions (to the step $k \geq 2$) of the observations stated for the simple cases of the step $k \leq 6$ which was given by the author (Dinh Van Tiep, Pham Thi Thu Hang, 2020). These extensions are the useful junctions which enable the proof for the results in that paper to be correct for the general case of the step k. Besides, these extensions also provide very nice properties for a class of symmetric polynomials established as a byproduct of the continuous block backward difference formula. These properties are not obvious and not easy to prove. The basis used to prove the results in this article is from the foundation of linear algebra. This basis is even simple, but it gives very nice proof.

VỀ BẬC ỔN ĐỊNH CỦA CÁC PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN LÙI DẠNG KHỐI LIÊN TỤC

Đinh Văn Tiệp*, Phạm Thị Thu Hằng
Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp - ĐH Thái Nguyên

THÔNG TIN BÀI BÁO

Ngày nhận bài: 10/8/2021

Ngày hoàn thiện: 27/8/2021

Ngày đăng: 27/8/2021

TỪ KHÓA

Phương pháp sai phân lùi
Phương pháp đa bước dạng khối
Phương trình vi phân thường
Bậc ổn định của phương pháp
Đặc trưng của tính ổn định

TÓM TẮT

Bài báo này trình bày hai kết quả quan trọng về tính ổn định cho họ các phương pháp sai phân lùi dạng khối liên tục để giải bài toán xấp xỉ nghiệm phương trình vi phân thường với điều kiện ban đầu. Đây là những mở rộng (với số bước $k \geq 2$) các khẳng định đã từng được đề cập bởi cùng tác giả (Đinh Văn Tiệp, Phạm Thị Thu Hằng, 2020) với số bước $k \leq 6$. Ngoài tạo ra cầu nối giữa các kết quả mở rộng này với các kết quả ở bài báo đó, các mở rộng này đưa các chứng minh ở bài báo đó đúng cho trường hợp tổng quát của k. Bên cạnh đó, sự mở rộng này tạo ra những kết quả thú vị về tính chất một lớp các đa thức đặc biệt được xây dựng mà việc chứng minh trực tiếp các tính chất của chúng là không đơn giản.

DOI: https://doi.org/10.34238/tnu-jst.4875

* Corresponding author. *Email: tiepdinhvan@tnut.edu.vn*

1. Giới thiệu

Ta xem xét phương trình vi phân thường với điều kiện ban đầu:

$$y' = f(t, y), a \leq t \leq b, y(a) = \alpha. \tag{1}$$

Phương pháp giải tích số bằng họ các công thức sai phân lùi (BDF) dạng khối liên tục được trình bày trong các bài báo [1]-[3]. Họ các phương pháp này thể hiện tính hiệu quả vượt trội đặc biệt trong việc xấp xỉ nghiệm cho lớp các bài toán stiff [4]-[6]. Tuy nhiên, các nghiên cứu này chỉ đưa ra các nhận định cho trường hợp $k \leq 6$ hoặc không có chứng minh cụ thể các kết quả sẽ được đề cập sau đây. Công thức BDF dạng khối liên tục với số bước $k \geq 2$ được đưa ra trong [2], [3] là:

$$A^{(1)} Y_{n+1} = A^{(0)} Y_n + h B^{(1)} F_{n+1}, \tag{2}$$

Với:

$$Y_{n+1} = (y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{n+k})^T, Y_n = (y_{n-k+1}, y_{n+k}, \dots, y_n)^T,$$

$$F_{n+1} = (f_{n+1}, f_{n+2}, \dots, f_{n+k})^T, y_j \approx y(t_j), f_j \approx f\left(t_j, y(tj)\right), \forall j = 1,2, \dots,$$

$A^{(1)}, A^{(0)}, B^{(1)}$ là các ma trận cấp $k \times k$. Ở đây, phương pháp BDF cho bởi công thức:

$$\begin{aligned} hf_{n+i} &= \sum_{j=0}^{k-1} a_{ij} y_{n+j} + h b_i f_{n+k}, \forall i = 1, \dots, k-1, \\ y_{n+k} &= \sum_{j=0}^{k-1} a_j y_{n+j} + h b_k f_{n+k}, \end{aligned} \tag{3}$$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1,k-1} & 0 \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2,k-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_{k-1,1} & -a_{k-1,2} & \cdots & -a_{k-1,k-1} & 0 \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{k-1} & 1 \end{bmatrix}, A^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{10} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & a_{k-1,0} \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 \end{bmatrix}, a_0 = 1,$$

$$B^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & b_2 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & -1 & b_{k-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_k \end{bmatrix}.$$

Trong bài báo [1], [2], các tác giả đã đưa ra nhận xét bậc ổn định $r > 0$ với từng giá trị của bước $k = 2, \dots, 6$ dựa vào quan sát cho các phương pháp này. Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{k-1} a_{jl} &= 0, \forall j = 1, \dots, k-1, \\ \sum_{j=0}^{k-1} a_j &= 1. \end{aligned} \quad (4), \forall k = 2, \dots, 6.$$

Ngoài ra, trong bài báo đó, các lập luận về sự khả nghịch của ma trận $A^{(1)}$ được đưa ra từ những quan sát cho trường hợp bước $k = 2, \dots 6$. Nội dung chính của bài báo này là sẽ đưa ra các chứng minh cho hai lập luận này với giá trị $k \geq 2$ tổng quát và dạng phát biểu của hai lập luận này cũng tổng quát hơn, thay vì xét $k+1$ điểm lưới với khoảng chia cách đều h là $t_n, t_n + h, t_n + 2h, \dots, t_n + kh$, ta đi xét bộ $k+1$ điểm lưới tổng quát: $t_0, t_1, \dots, t_k$.

1.1. Xây dựng hệ số của phương pháp dạng ma trận

Giả sử nghiệm đúng của (1) được biểu diễn thành:

$$y(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_k t^k.$$

Để thu được (3) ta cần tính giá trị của $y(t)$ tại các điểm lưới $t_0, t_1, \dots, t_{k-1}$ và $y'(t)$ tại t_k rồi đồng nhất các kết quả tương ứng với $y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k-1}$, và f_{n+k}. Sau đó thu được:

$$y(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j(t) y_{n+j} + \beta(t) f_{n+k}. \qquad (5)$$

Từ nghiệm nhận được ở (5), thực hiện tính giá trị $y'(t)$ tại $t_1, t_2, \dots, t_{k-1}$ và $y(t)$ tại t_k ta thu được (3).

Quá trình này có thể được biểu diễn dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \dots & t_0^k \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & t_{k-1} & t_{k-1}^2 & \dots & t_{k-1}^k \\ 0 & 1 & 2t_k & \dots & kt_k^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_n \\ y_{n+1} \\ \vdots \\ y_{n+k-1} \\ f_{n+k} \end{bmatrix} := A \begin{bmatrix} y_n \\ y_{n+1} \\ \vdots \\ y_{n+k-1} \\ f_{n+k} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \\ \vdots \\ f_{n+k-1} \\ y_{n+k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2t_1 & \dots & kt_1^{k-1} \\ 0 & 1 & 2t_2 & \dots & kt_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 1 & 2t_{k-1} & \dots & kt_{k-1}^{k-1} \\ 1 & t_k & t_k^2 & \dots & t_k^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} := B \begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}.$$

Khi đó, ta thấy rằng, $A \in \mathbb{M}(k+1), B \in \mathbb{M}(k, k+1)$ và nếu các điểm lưới $t_0, t_1, \dots, t_{k-1}, t_k$ có các điểm chia cách đều với bước chia h thì các hệ số ở (3) được cho bởi đẳng thức:

$$\frac{1}{h} C := \frac{1}{h} \begin{bmatrix} a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & hb_1 \\ a_{20} & a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & hb_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k-1,0} & a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,k-1} & hb_{k-1} \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{k-1} & hb_k \end{bmatrix} = BA^{-1} \in \mathbb{M}(k, k+1). \qquad (6)$$

1.2. Dạng ma trận của các kết luận cần chứng minh

Đối với kết luận rằng ma trận $A^{(1)}$ là khả nghịch, từ phân tích (6) ta thấy rằng nó là đủ để kết luận này đúng nếu ma trận vuông con gồm k cột đầu tiên của ma trận tích BA^{-1} khả nghịch, tức hạng của ma trận BA^{-1} bằng k.

Đối với kết luận (4), ta cần chứng minh rằng, tổng k cột đầu tiên của ma trận BA^{-1} bằng véctơ cơ sở chính tắc $\boldsymbol{e_k} = (0,0,\dots,0,1)^T \in \mathbb{R}^k$. Thực tế, trong bài báo này ta sẽ chứng minh một kết quả mạnh hơn thể hiện đặc tính của ma trận A^{-1}, ma trận nghịch đảo của A, đó là tổng k véctơ cột đầu tiên của A^{-1} bằng véctơ cơ sở chính tắc $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k}} = (0,0,\dots,0,1) \in \mathbb{R}^{k+1}$.

2. Tính khả nghịch của ma trận $A^{(1)}$

Ma trận vuông cấp k

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1,k-1} & 0 \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2,k-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_{k-1,1} & -a_{k-1,2} & \cdots & -a_{k-1,k-1} & 0 \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{k-1} & 1 \end{bmatrix},$$

thu được ở (3), là khả nghịch nếu hạng bằng k, $rank\left(A^{(1)}\right) = k$. Điều này được thỏa mãn nếu trong (6) ta có $rank(BA^{-1}) = k$. Kết quả này được chứng minh trong Định lý 1 dưới đây. Trước hết ta xét hai bổ đề sau.

Bổ đề 1. Cho hai ma trận $P \in \mathbb{M}(r, p), Q \in \mathbb{M}(p)$. Khi đó, nếu Q khả nghịch thì $rank(P) = rank(PQ)$.

Chứng minh. Giả sử $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_p}\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^p$. Vì Q khả nghịch nên $\{Q\boldsymbol{e_1}, Q\boldsymbol{e_2}, \dots, Q\boldsymbol{e_p}\}$ lập thành một cơ sở của $\mathbb{R}^p$. Do đó:

$$rank(P) = \dim\big(Im(P)\big) = \dim\Big(Spann\big(\{P\boldsymbol{e_1}, P\boldsymbol{e_2}, \dots, P\boldsymbol{e_p}\}\big)\Big)$$

$$= \dim\Big(Spann\big(\{PQ\boldsymbol{e_1}, PQ\boldsymbol{e_2}, \dots, PQ\boldsymbol{e_p}\}\big)\Big) = \dim\big(Im(PQ)\big) = rank(PQ),$$

Trong đó, $Im(.), Spann(.)$ là các ký hiệu của không gian ảnh của ma trận và bao tuyến tính của tập véctơ tương ứng. Chẳng hạn,

$$Im(P) = \{P\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p\}, Spann\big(\{P\boldsymbol{e_1}, P\boldsymbol{e_2}, \dots, P\boldsymbol{e_p}\}\big) = \left\{\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \boldsymbol{e}_j \,\middle|\, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}\right\}. \quad \square$$

Bổ đề 2. Xét hai ma trận A, B cho bởi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \dots & t_0^k \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & t_{k-1} & t_{k-1}^2 & \dots & t_{k-1}^k \\ 0 & 1 & 2t_k & \dots & kt_k^{k-1} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2t_1 & \dots & kt_1^{k-1} \\ 0 & 1 & 2t_2 & \dots & kt_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 1 & 2t_{k-1} & \dots & kt_{k-1}^{k-1} \\ 1 & t_k & t_k^2 & \dots & t_k^k \end{bmatrix}.$$

Khi đó, ma trận A là khả nghịch và hạng của ma trận B bằng k, với mọi bộ điểm lưới đôi một phân biệt $t_0, t_1, \dots, t_k$ và $t_0, t_1, \dots, t_{k-1}$ đều khác không.

Chứng minh. Xét ma trận vuông con A_* cấp k của A gồm k hàng đầu tiên (từ trên xuống) và k cột cuối cùng (từ trái qua phải),

$$A_* \coloneqq \begin{bmatrix} t_0 & t_0^2 & \dots & t_0^k \\ t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^k \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ t_{k-1} & t_{k-1}^2 & \dots & t_{k-1}^k \end{bmatrix}$$

thỏa mãn

$$\det(A_*) = t_0 t_1 \dots t_{k-1} \det\big(Vandermonde(t_0, \dots, t_{k-1})\big) = t_0 t_1 \dots t_{k-1} \prod_{0 \le j < i \le k-1} (t_i - t_j) \neq 0.$$

Ở đây, $Vandermonde(t_0, \dots, t_{k-1})$ là ma trận Vandermonde với hàng thứ j được tạo thành từ các đơn thức $t_{j-1}^i, \forall i = 0, \dots, k-1$ sắp xếp theo thứ tự tăng dần của i.

Xét ma trận vuông con B_* cấp $k-1$ của B gồm $k-1$ hàng đầu tiên (từ trên xuống) và $k-1$ cột (trái qua phải) từ cột thứ 2 đến cột thứ k,

$$B_* \coloneqq \begin{bmatrix} 1 & 2t_1 & \dots & (k-1)t_1^{k-2} \\ 1 & 2t_2 & \dots & (k-1)t_2^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 2t_{k-1} & \dots & (k-1)\, t_{k-1}^{k-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & \dots & t_1^{k-2} \\ 1 & t_2 & \dots & t_2^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & t_{k-1} & \dots & t_{k-1}^{k-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & k-1 \end{bmatrix}$$

$$= Vandermonde(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & k-1 \end{bmatrix}.$$

$$\det(B_*) = (k-1)! \prod_{1 \le j < i \le k-1} (t_i - t_j) \neq 0.$$

Do đó, $rank(B_*) = k-1, rank(B) = k$. □

Định lý 1. Hạng của ma trận tích BA^{-1} bằng k.

Chứng minh. Vì A khả nghịch, nên A^{-1} tồn tại và khả nghịch, theo Bổ đề 1 và Bổ đề 2 ta có $rank(BA^{-1}) = rank(B) = k$. □

Rõ ràng, kết quả $A^{(1)}$ khả nghịch là rất ý nghĩa. Nó cho phép ta có thể chuyển đổi phương trình (2) về dạng lặp như đã trình bày trong công thức (4) của [1]. Công thức này cho phép chúng ta xây dựng thuật toán, trình thực thi và chứng minh sự hội tụ của phương pháp BDF dạng khối liên tục.

Trong Bổ đề 2, chúng ta đặt ra điều kiện rằng các điểm lưới $t_0, t_1, \dots, t_{k-1}$ đều khác không. Nhưng điều kiện này thực sự không quá quan trọng, bằng các phương pháp đơn bước, ta hoàn toàn có thể thay thế k giá trị xấp xỉ ban đầu bằng k giá trị khác mà không chứa lưới gồm có một điểm lưới là 0. Sau đó, việc sinh ra ma trận A sẽ thỏa mãn điều kiện của Bổ đề 2. Do đó, trong suốt bài báo này, ta luôn có thể giả sử A^{-1} tồn tại.

3. Bậc ổn định của phương pháp BDF dạng khối liên tục với số bước $k \geq 2$

Phần này trình bày chứng minh các đẳng thức (4) cho trường hợp bước số bước k tổng quát. Điều này cho thấy các phương pháp BDF dạng khối liên tục với $k \geq 2$ đều có bậc ổn định $r > 0$.

3.1. Dạng ma trận của $(\mathbf{4})$

Từ đẳng thức (6), ta thấy rằng (4) tương đương với đẳng thức:

$$\sum_{j=0}^{k-1} BA_j^{-1} = \boldsymbol{e_k} = (0, \dots, 0,1)^T \in \mathbb{R}^k, \qquad (7)$$

với $\boldsymbol{e_k} = (0, \dots, 0,1)^T$ là véctơ cơ sở chính tắc thứ k của $\mathbb{R}^k$, và $A_j^{-1} \in \mathbb{R}^{k+1}$ là véctơ cột thứ $j+1$ $(0 \leq j \leq k)$ của ma trận A^{-1}. Giả sử:

$$A^{-1} := \left[A_0^{-1}, A_1^{-1}, \dots, A_k^{-1}\right] = \begin{bmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \dots & \alpha_{0k} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k0} & \alpha_{k1} & \dots & \alpha_{kk} \end{bmatrix}.$$

Giả sử A_j là véctơ cột thứ $j+1$ $(0 \leq j \leq k)$ của ma trận A, ta có $A = [A_0, A_1, \dots, A_k]$ và

$$AA_j^{-1} = \boldsymbol{\hat{e}_{j+1}} = (0, \dots, 0,1,0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{k+1}, \forall j = 0, \dots, k, \qquad (8)$$

với véctơ cột $\boldsymbol{\hat{e}_{j+1}}$ là véctơ thứ $j+1$ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^{k+1}$ mà chỉ có một thành phần khác không là 1 ở vị trí thứ $j+1$.

3.2. Bậc ổn định dương của các phương pháp BDF k bước dạng khối liên tục

Kết quả chính được trình bày trong Định lý 2. Trước hết, ta có kết quả sau:

Bổ đề 3. Với các véctơ cột xác định A^{-1} ở (8) thì $\sum_{j=0}^{k-1} A_j^{-1} = \boldsymbol{\hat{e}_1} = (1,0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{k+1}$.

Chứng minh. Với mọi $j = 0, \dots, k-1$, từ (8) ta có:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{ij} A_i = \boldsymbol{\hat{e}_{j+1}}.$$

Do đó, $\sum_{j=0}^{k-1}\left(\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{ij} A_i\right) = \sum_{j=0}^{k-1} \boldsymbol{\hat{e}_{j+1}} = (1,1, \dots, 1,0)^T = A_0 \in \mathbb{R}^{k+1}$. Từ đó ta được:

$$\left(\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{ij} - 1\right) A_0 + \sum_{i=1}^{k-1}\left(\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{ij}\right) A_i = \boldsymbol{\hat{0}} = (0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{k+1}. \qquad (9)$$

Từ Bổ đề 2, vì A khả nghịch, các véctơ cột của A độc lập tuyến tính. Điều này làm cho đẳng thức (9) kéo theo:

$$\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{ij} = 1, \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{ij} = 0, \forall i = 1,2, \dots, k-1.$$

Tức là $\sum_{j=0}^{k-1} A_j^{-1} = \boldsymbol{\hat{e}_1}$. □

Định lý 2. Các phương pháp BDF k bước dạng khối liên tục (3) với mọi $k \geq 2$ đều có bậc $r \geq 0$ thỏa mãn điều kiện (4).

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh (7) là đủ. Thật vậy, từ Bổ đề 3, ta có:

$$\sum_{j=0}^{k-1} BA_j^{-1} = B\left(\sum_{j=0}^{k-1} A_j^{-1}\right) = B\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}} = (0, \dots, 0,1)^T \in \mathbb{R}^k.$$

Điều này có được từ thực tế rằng cột véctơ đầu tiên của ma trận B chính là $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}$. □

3.3. Các hệ quả về mặt đại số

Phần này, ta sẽ trình bày các kết quả về lớp các đa thức với hệ số đối xứng thu được từ chứng minh của Định lý 2. Lớp các đa thức bậc $\boldsymbol{k}$ này là:

$$P_j(x) = \alpha_{0j} + \alpha_{1j}x + \ldots + \alpha_{kj}x^k, \forall j = 0, \ldots, k, \qquad (10)$$

thỏa mãn các điều kiện, với mọi $j = 0, \dots, k-1$,

$$\begin{cases} P_j(t_s) = 0, \forall s = 0, \ldots, k-1, s \neq j. \\ P_j(t_j) = 1, \\ P_j'(t_k) = 0. \end{cases} \qquad (11)$$

$$\begin{cases} P_k(t_s) = 0, \forall s = 0, \dots, k-1, \\ P_k'(t_k) = 1. \end{cases} \qquad (12)$$

Kết quả sau đây cho ta cách biểu diễn dạng tường minh của họ các đa thức này.

Định lý 3. Các đa thức cho bởi điều kiện (11) và (12) là:

$$P_j(x) = \frac{\prod_{i=0,i\neq j}^{k-1}(x-t_i)}{\prod_{i=0,i\neq j}^{k-1}(t_j-t_i)}\left[\theta_j(x-t_j)+1\right], \theta_j = \frac{-\sum_{s=0}^{k-1}\prod_{\substack{i=0,\\ i\neq s, i\neq j}}^{k-1}(t_k-t_i)}{\sum_{s=0}^{k-1}\prod_{i=0,i\neq s}^{k-1}(t_k-t_i)}, \forall j = 0, \dots, k-1,$$

$$P_k(x) = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(x-t_i)}{\sum_{s=0}^{k-1}\prod_{i=0,i\neq s}^{k-1}(t_k-t_i)}.$$

Định lý sau là hệ quả thu được từ Định lý 2. Kết quả này cho chúng ta những tính chất đẹp của các đa thức (11).

Định lý 4. Các đa thức (10) thỏa mãn:

$$\sum_{j=0}^{k-1} P_j(t_k) = 1, \sum_{j=0}^{k-1} P_j'(t_s) = 0, \forall s = 1, \dots, k-1.$$

Chứng minh. Từ định nghĩa (10) của các đa thức P_j ta có, với mọi $j = 0, \dots, k-1$, thành phần thứ s của véctơ cột BA_j^{-1} là $P_j'(t_s), \forall\, s = 1, \dots, k-1$, và thành phần thứ k của véctơ cột BA_j^{-1} là $P_j(t_k)$. Do đó, theo Định lý 2, $\sum_{j=0}^{k-1} P_j'(t_s) = 0$ là thành phần thứ s ($s = 0, \dots, k-1$) của véctơ cột $\sum_{j=0}^{k-1} BA_j^{-1}$ và $\sum_{j=0}^{k-1} P_j(t_k) = 1$ là thành phần thứ k của véctơ $\sum_{j=0}^{k-1} BA_j^{-1}$. □

4. Kết luận

Bài báo đã trình bày chứng minh chặt chẽ cho trường hợp k bước tổng quát của họ các phương pháp BDF dạng khối liên tục. Các kết quả quan trọng này làm cơ sở lý thuyết tổng quan cho các phương pháp. Đồng thời các kết quả thu được ở [1] nhờ đó có thể mở rộng cho trường hợp $k \geq 2$ tổng quát, làm cho các phương pháp này càng thể hiện rõ ràng tính ưu việt. Ngoài ra, các kết quả này là cơ sở cho những sự cải tiến tiếp theo có thể được phát minh trong tương lai.

Lời cám ơn

Đề tài nhận được tài trợ kinh phí từ trường Đại học Kỹ thuật Công Nghiệp - Đại học Thái Nguyên. Chúng tôi xin chân thành cảm ơn sự hỗ trợ đáng quý này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

[1] V. T. Dinh and T. T. H. Pham, "Constructing the implimentation to the continuous block BDF methods," (in Vietnamese), *TNU Journal of Science and Technology*, vol. 204, no. 11, pp. 23-30, 2019.
[2] O. A. Akinfenwa, S. N. Jator, and N. M. Yao, "Continuous block backward differentiation formula for solving stiff ordinary differential equations," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 65, no. 7, pp. 996-1005, 2013.
[3] O. A. Akinfenwa, S. N. Jator, and N. M. Yao, "On The Stability of Continuous Block Backward Differentiation Formula For Solving Stiff Ordinary Differential Equations," *J. of Mod. Meth*. in Numer. Math., vol. 3, no. 2, pp. 50-58, 2012.
[4] A. A. Izzati, S. A. M. Yatim, Z. Ibrahim, and Z. Nooraini, "High Order Block Method for Third Order ODEs," *Computers, Materials & Continua*, vol. 67, pp. 1253-1267, 2021, doi: 10.32604/cmc.2021.014781.
[5] A. Naghmeh, S. Mohamed, A. Neda, and H. Musa, "2-Point Block BDF Method with Off-Step Points for Solving Stiff ODEs," *Journal of Soft Computing and Applications*, 2014, doi: 10.5899/2014/jsca-00039.
[6] A. A. Nasarudin, Z. B. Ibrahim, and H. Rosali, "On the Integration of Stiff ODEs Using Block Backward Differentiation Formulas of Order Six," *Symmetry*, vol. 12, 2020, doi: 10.3390/sym12060952.