

AN ALGORITHM FOR TRAFFIC DENSITY DETERMINATION FOR NON HOMOGENEOUS LWR PROBLEM WITH THE MIXED BOUNDARY CONDITION

Nguyen Dinh Dung

TNU - University of Information and Communication Technology

THÔNG TIN BÀI BÁO	TÓM TẮT
Ngày nhận bài: 14/9/2021	In last few decades, it is observed that urban transport faces several problems due to rapid urbanization and motorization. Therefore, it is necessary to develop a sustainable transport system. The promotion of Intelligent Transportation System is one of the measures to minimize inconvenience of congested roads and raising the level of service of the roads. Traffic flow problem plays a pivotal role in predicting the onset of traffic congestion. This problem can be defined as the study of how the vehicles move between origin and destination, mathematical models have been built which study the consistent behavior between the traffic streams via relationships such as flow, density and the mean velocity, traffic flow was represented using a first order partial differential equation and was based on a hyperbolic system of conservation laws. In this paper, we consider one- nonhomogeneous equation Lighthill Witham Richards (LWR) model combined with the mixed boundary condition and designing an algorithm to solve this problem.
Ngày hoàn thiện: 05/11/2021	
Ngày đăng: 08/11/2021	
TỪ KHÓA	
Intelligent traffic	
Conservation laws	
Traffic flow	
Difference scheme	
Numerical algorithms	

THUẬT TOÁN XÁC ĐỊNH MẬT ĐỘ GIAO THÔNG ĐỐI VỚI BÀI TOÁN LWR KHÔNG THUẬN NHẤT VỚI ĐIỀU KIỆN BIÊN HỖN HỢP

Nguyễn Đình Dũng

Trường Đại học Công nghệ thông tin và Truyền thông - ĐH Thái Nguyên

ARTICLE INFO	ABSTRACT
Received: 14/9/2021	Trong những thập kỷ gần đây, ngành giao thông đô thị của mỗi quốc gia đã và đang phải đối mặt với nhiều khó khăn trước sự gia tăng nhanh chóng của các phương tiện giao thông đường bộ. Vì vậy, phát triển hệ thống giao thông bền vững là yêu cầu cấp thiết được đặt ra, trong đó thúc đẩy sự phát triển hệ thống giao thông thông minh là mục tiêu cần đạt được nhằm giảm thiểu sự ùn tắc và nâng cao chất lượng phục vụ của lĩnh vực giao thông đường bộ. Bài toán về việc xác định mật độ giao thông đóng vai trò là một trong những nhân tố chính đối với hệ thống giao thông thông minh với mục tiêu là dự báo sự ùn tắc cho mỗi tuyến đường. Bài toán này đặt ra yêu cầu nghiên cứu sự dịch chuyển của các phương tiện trên một đoạn đường được xác định bởi điểm đầu và điểm cuối, mô hình toán học của bài toán mô tả luồng giao thông thông qua mối quan hệ giữa lưu lượng, mật độ và vận tốc trung bình của phương tiện giao thông. Dựa trên định luật bảo toàn luồng, bài toán thực tiễn dẫn về bài toán đối với phương trình đạo hàm riêng cấp một dạng hyperbolic. Trong bài báo này, chúng tôi xét tới bài toán đối với phương trình LWR không thuận nhất với điều kiện biên hỗn hợp và xây dựng thuật toán tìm nghiệm xấp xỉ cho bài toán.
Revised: 05/11/2021	
Published: 08/11/2021	
KEYWORDS	
Giao thông thông minh	
Định luật bảo toàn	
Lưu lượng giao thông	
Lược đồ sai phân	
Thuật toán số	

DOI: <https://doi.org/10.34238/tnu-jst.5050>

Email: dungnd@tnu.edu.vn

<http://jst.tnu.edu.vn>

66

Email: jst@tnu.edu.vn

1. Giới thiệu

Bài toán xác định mật độ giao thông lần đầu tiên được mô hình hoá bởi các tác giả Lighthill-Whitham-Richards vào những năm 1955, 1956. Các kết quả trong [1], [2] đã mô tả mô hình bài toán như sau:

Ký hiệu mật độ phương tiện giao thông tại vị trí x trên đoạn đường và thời điểm t là $u(x, t)$, đơn vị tính là số phương tiện trên một đơn vị độ dài quãng đường; lưu lượng xe tại vị trí x , thời điểm t là $Q(x, t)$, được xác định là số lượng xe đi qua vị trí x , thời điểm t , có đơn vị tính là số lượng xe trong một đơn vị thời gian.

Bài toán đặt ra là tìm mật độ giao thông trên một quãng đường $\Delta x = x_2 - x_1$. Áp dụng định luật bảo toàn luồng, ta có phương trình sau:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx = Q(x_1, t) - Q(x_2, t) \quad (1)$$

Hay có thể viết:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \right) dx = 0 \quad (2)$$

Từ (2), ta suy ra:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

Trong đó, $Q(x, t)$ là hàm phụ thuộc vào mật độ và vận tốc phương tiện, tức là $Q(x, t) = Q(u, v(u))$. $v(u)$ là vận tốc của phương tiện và phụ thuộc vào mật độ của phương tiện giao thông, $Q(u, v(u))$ và $v(u)$ là các hàm liên tục, trong mô hình Greenshields [3], thì vận tốc

là đại lượng phụ thuộc tuyến tính vào mật độ và được xác định là $v(u) = v_{\max} \left(1 - \frac{u}{u_{\max}} \right)$. Ở đây,

$u_{\max}$, $v_{\max}$ lần lượt là giới hạn mật độ tối đa và vận tốc tối đa cho phép khi lưu thông trên quãng đường được xét.

Tại các điểm đầu và cuối đoạn đường, hàm mật độ thỏa mãn điều kiện biên Dirichlet. Cụ thể, khi xét bài toán đối phương trình (3) trên đoạn đường có chiều dài là $l = b - a$, ta cần xác định $u(x, t)$ thỏa mãn (3) với $(x, t) \in \Omega_T = \{a < x < b; 0 < t \leq T\}$ và thỏa mãn các điều kiện đầu, điều kiện biên:

$$u(x, 0) = g(x), \quad a < x < b, \quad (4)$$

$$u(a, t) = g_a(t); \quad u(b, t) = g_b(t) \quad 0 < t \leq T, \quad (5)$$

Hiện nay đã có nhiều công trình nghiên cứu xây dựng mô hình và tính toán tìm lời giải cho bài toán đối với phương trình (3) ở nhiều góc độ, giả thiết và từ đó đưa ra những mô hình toán học khác nhau và những phương pháp tìm nghiệm của bài toán tùy thuộc vào mỗi mô hình được thiết lập.

M. O. Gani [4] đã sử dụng lược đồ sai phân Lax-Friedrichs để tìm nghiệm của bài toán (3)-(5), phương pháp này hội tụ với điều kiện $v_{\max} \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$, trong đó Δx là bước lưới không gian,

Δt bước lưới thời gian.

Trong trường hợp hàm lưu lượng được mô tả bởi hàm Moskowitz và thỏa mãn điều kiện Hamilton-Jacobi [5] thì nghiệm của bài toán đối với phương trình (3) hoàn toàn có thể tìm được nhờ công thức Lax-Hopf [5].

Năm 2013, Wen-Long Jin [6] đã nghiên cứu và mô hình hoá bài toán đối với phương trình (3) khi xét trong trường hợp nhiều lần đường, với các giá trị mật độ tại các điểm đầu, điểm cuối đoạn đường thoả mãn các điều kiện entropy [6]. Nahid Sultana [7] đề xuất phương pháp sai phân tiến và sai phân trung tâm tìm nghiệm số của bài toán (3)-(5) khi vận tốc là hàm phụ thuộc tuyến tính vào mật độ.

Năm 2018, Michael Burger [8] xét bài toán đối với mô hình Lighthill-Whitham-Richards có trễ và đưa ra lược đồ sai phân Lax-Friedrichs tìm nghiệm của bài toán (3)-(5). Khi xét tới bài toán tìm mật độ có tính đến những đoạn đường xảy ra ùn tắc, vị trí tắc nghẽn (“nút thắt cổ chai”) làm giảm vận tốc của phương tiện, Gabriella Bretti và cộng sự [9] đã mô hình hoá bài toán và đưa ra hai thuật toán tìm nghiệm số, bao gồm lược đồ sai phân WFT-ODE nửa rời rạc và lược đồ sai phân Godunov-ODE-FS, sự hội tụ của lược đồ được chứng minh và minh hoạ cụ thể bằng các kết quả tính toán số.

Gần đây, Thibault Liard [10] tiếp tục phát triển các kết quả trong [4] và đưa ra mô hình bài toán Riemann - Cauchy. Trong đó có mô tả mối liên hệ giữa lượng nhiên liệu tiêu thụ là hàm phụ thuộc vào tốc độ và đặt ra mục tiêu của bài toán là tìm vận tốc sao cho lượng nhiên liệu tiêu thụ là nhỏ nhất.

2. Mô hình toán học

Từ các mô hình toán học đã công bố trước đó, chúng tôi xét bài toán cụ thể như sau: Cho các số a, b với $a < b$. Chiều dài đoạn đường là $l = b - a$. Trên một tuyến đường, chúng tôi mở rộng bài toán đối với (3) khi về phải là đại lượng khác không trong trường hợp có sai số mô hình với điều kiện biên hỗn hợp, tức là nghiệm của bài toán thoả mãn các điều kiện biên hàm và điều kiện biên đạo hàm. Bài toán cụ thể như sau:

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(Q)}{\partial x} = f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T \quad (6)$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad a < x < b \quad (7)$$

$$u(a, t) = g_a(t); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(b, t) = g_b(t), \quad 0 < t \leq T \quad (8)$$

Trong đó, $g(x)$ là mật độ giao thông tại thời điểm đầu; $g_a(t)$ mật độ tại điểm vào a ; $g_b(t)$ mô tả sự biến động theo thời gian về mật độ tại điểm ra b ; $Q(x, t) = Q(u, v(u))$.

3. Lược đồ sai phân

3.1. Lưới sai phân và xấp xỉ các đạo hàm

Chọn hai số nguyên $N > 1$, $M \geq 1$ và đặt:

$$\Delta x = \frac{b-a}{N}; \quad x_i = a + i\Delta x; \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$\Delta t = \frac{T}{M}; \quad t_j = j\Delta t; \quad j = 0, 1, 2, \dots, M$$

Ta chia miền Q_T thành ô bởi những đường thẳng $x = x_i$, $t = t_j$, mỗi điểm (x_i, t_j) được gọi là một nút và ký hiệu là (i, j) . Mục tiêu của phương pháp là tìm nghiệm gần đúng của bài toán tại các nút (i, j) , và:

Δx gọi là bước lưới không gian.

Δt gọi là bước lưới thời gian.

Tập tất cả các nút (i, j) tạo thành một lưới sai phân trên miền:

$$\bar{\Omega}_T = \{a \leq x \leq b; 0 \leq t \leq T\}.$$

Sau đây ta lần lượt xấp xỉ các đạo hàm bằng các đạo hàm lưới.

$$Q(x_{i+1}, t_j) = Q(x_i, t_j) + h \frac{\partial Q}{\partial x}(x_i, t_j) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}(x_i, t_j) \Delta x^2 + O(\Delta x)^3 \quad (9)$$

$$Q(x_{i-1}, t_j) = Q(x_i, t_j) - \Delta x \frac{\partial Q}{\partial x}(x_i, t_j) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}(x_i, t_j) \Delta x^2 + O(\Delta x)^3 \quad (10)$$

Từ (9), (10) suy ra:

$$\frac{Q(x_{i+1}, t_j) - Q(x_{i-1}, t_j)}{2\Delta x} = \frac{\partial Q}{\partial x}(x_i, t_j) + o(\Delta x^2) \quad (11)$$

Có nhiều cách xấp xỉ đạo hàm dẫn đến có nhiều phương án khác nhau để thay thế bài toán vi phân bởi bài toán sai phân. Sau đây chúng tôi thiết kế một lược đồ sai phân tìm nghiệm xấp xỉ trên lưới sai phân.

3.2. Lược đồ sai phân

Bài toán đặt ra là tìm nghiệm gần đúng $u_i^j \approx u(x_i, t_j)$.

Xấp xỉ các đạo hàm ta có:

$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta t} + \frac{Q(x_{i+1}, t_j) - Q(x_{i-1}, t_j)}{2\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x_i, t_j) + o(\Delta t + \Delta x^2) \quad (12)$$

Đặt $Q_i^j \approx Q(x_i, t_j)$, $v_i^j \approx v(u(x_i, t_j))$, $u_i^j \approx u(x_i, t_j)$ ta đưa (12) về bài toán sai phân sau:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} + \frac{Q_{i+1}^j - Q_{i-1}^j}{2\Delta x} = f(x_i, t_j); \quad i = 1..N-1, \quad j = 0..M-1 \quad (13)$$

$$\text{Đặt } \gamma = \frac{\Delta t}{2\Delta x} \text{ thì (12) được viết thành: } u_i^{j+1} = u_i^j - \gamma(Q_{i+1}^j - Q_{i-1}^j) + \tau f(x_i, t_j) \quad (14)$$

Đến đây, ta xấp xỉ:

$$u_i^j = \frac{1}{2}(u_{i-1}^j + u_{i+1}^j) \quad (15)$$

Kết hợp (14), (15) với các điều kiện đầu và điều kiện biên, ta có bài toán sai phân:

$$u_i^{j+1} = \frac{1}{2}((u_{i-1}^j + u_{i+1}^j) - 2\gamma(Q_{i+1}^j - Q_{i-1}^j)) + \Delta t f(x_i, t_j); \quad i = 1..N-1, \quad j = 0..M-1 \quad (16)$$

$$u_i^0 = g(x_i) \quad i = 1..N-1 \quad (17)$$

$$u_0^j = g_a(t_j), \quad u_N^j = u_N^{j-1} + \Delta t g_b(t_j); \quad j = 1..M \quad (18)$$

Từ (16) ta thấy, xuất phát từ các nút lưới sai phân tại lớp đầu tiên ($j=0$), ta tính được nghiệm xấp xỉ tại các nút lưới thứ nhất ($j=1$), từ lớp thứ nhất đã tính được nghiệm tại các nút trong và kết hợp với các điều kiện cho trên biên, ta tính được nghiệm xấp xỉ tại các nút lưới ở lớp thứ hai, ... kết hợp nghiệm xấp xỉ tính được tại lớp thứ $M-1$ và các điều kiện trên biên ta tính được nghiệm xấp xỉ tại lớp thời gian T . Định lý sau đây chỉ ra rằng, lược đồ sai phân (16)-(18) là ổn định và hội tụ.

Định lý:

Nếu $\sup \left\{ \frac{\partial Q}{\partial u} : x \in [a, b], t \in [0, T] \right\} \leq \frac{\Delta x}{\Delta t}$ thì lược đồ sai phân (16)-(18) ổn định và hội tụ cấp một đối với Δt và cấp hai đối với Δx .

4. Một số kết quả tính toán

Trong mục này, chúng tôi thực hiện một số tính toán thử nghiệm để kiểm tra lý thuyết về sự hội tụ của thuật toán được trình bày trong mục 3. Sau đây là một số dữ kiện cho trước để tính toán cho lược đồ sai phân:

Hàm vận tốc là hàm phụ thuộc mật độ và có dạng:

$$v = v_{\max} \left(1 - \frac{u}{u_{\max}} \right).$$

Hàm lưu lượng: $Q = uv(u)$.

$$\text{Hàm về phải } f(x, t) = \frac{u_{\max}}{T(b-a)} \left[x - b + v_{\max} t \left(\frac{2t(x-b)}{T(b-a)} + 1 \right) \right].$$

Mật độ tại thời điểm ban đầu $u(x, 0) = g(x) = u_{\max}$.

$$\text{Mật độ tại cửa vào } u(a, t) = u_{\max} \left(1 - \frac{t}{T} \right),$$

$$\text{Biến động mật độ tại cửa ra } \frac{\partial u}{\partial x}(b, t) = 0$$

$$\text{Với dữ kiện này, ta có mật độ chính xác (nghiệm đúng) là } u = u_{\max} \left(1 - \frac{t(b-x)}{T(b-a)} \right)$$

$$\text{và vận tốc } v = \frac{v_{\max} t}{T(b-a)} (b-x).$$

Ta giải thiết $a=0$; $b=2 \text{ km}$; $T=1 \text{ giờ}$; $u_{\max}=120 \text{ xe/km}$; $v_{\max}=80 \text{ km/h}$;

Sai số tính toán được xác định là $Err = \max \left\{ |u_i^j - u(x_i, t_j)| \right\}$

Với dữ kiện cho ở trên, ta có $\frac{\partial Q}{\partial u} = v_{\max} \left(1 - \frac{2u}{u_{\max}} \right)$, $\sup \left(\frac{\partial J}{\partial u} \right) = v_{\max}$.

Để quá trình lặp ổn định và hội tụ thì bước lưới phải thỏa mãn

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{v_{\max}} = \frac{1}{80} = 0.0125$$

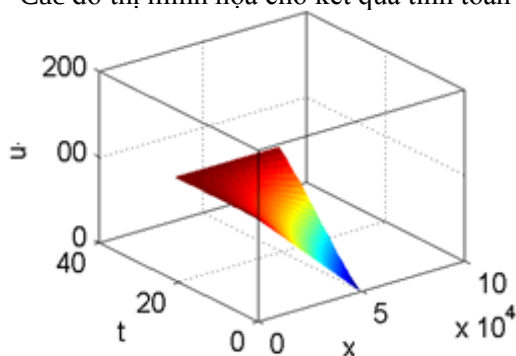
Bảng 1. Kết quả tính toán đối với lược đồ sai phân Lax-Friedrichs

N	M	Δx (Km)	Δt (Giờ)	Err (xe)
20	500	0,1000	0,00200	Inf
20	1000	0,1000	0,00100	105,9528
20	5000	0,1000	0,00020	57,5254
20	10000	0,1000	0,00010	29,6553
20	20000	0,1000	0,00005	13,7533
20	50000	0,1000	0,00002	5,1550

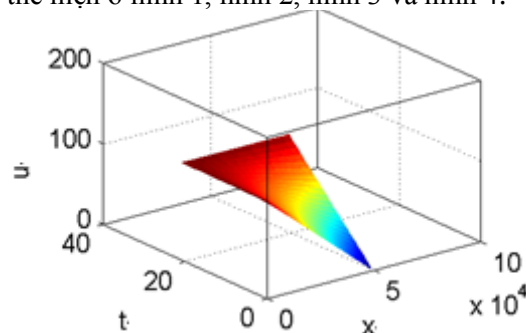
Từ bảng trên ta thấy, với trường hợp $N=20$, $M=100$ thì $\frac{\Delta t}{\Delta x} > \frac{1}{v_{\max}}$, cho nên sai số gặp phải rất lớn, quá trình tính toán không ổn định, thuật toán không hội tụ. Bắt đầu từ hàng thứ 2 của bảng 1,

khi cho M tăng dần từ 1000 đến 50000 thì ta nhận thấy các điều kiện lặp đảm bảo sự ổn định và hội tụ, khi đó sai số giảm dần từ 105.9528 đến 5.1550. Kết quả này đã cho thấy tính toán thực nghiệm là hoàn toàn phù hợp với lý thuyết đưa ra. Độ phức tạp tính toán là $O(M.N)$.

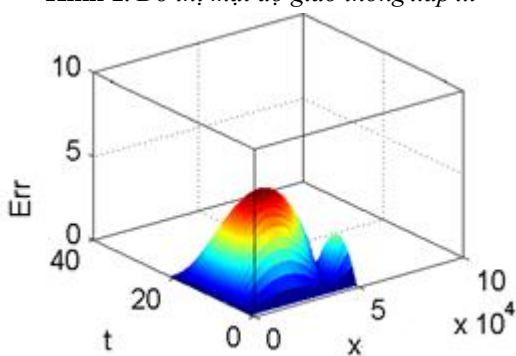
Các đồ thị minh họa cho kết quả tính toán được thể hiện ở hình 1, hình 2, hình 3 và hình 4.



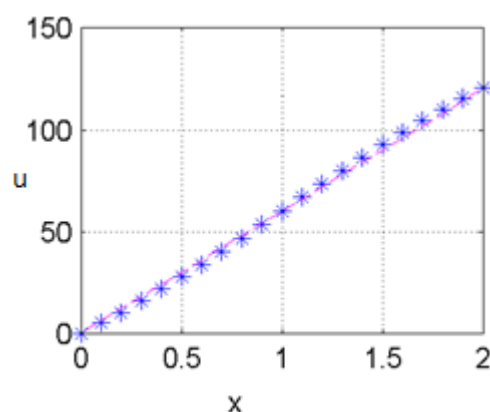
Hình 1. Đồ thị mật độ giao thông xấp xỉ



Hình 2. Đồ thị nghiệm đúng



Hình 3. Đồ thị sai số



Hình 4. Đồ thị nghiệm xấp xỉ và nghiệm đúng tại thời điểm sau 1 giờ đồng hồ ($N=20, M=50.000$)

Ở đồ thị Hình 4, đường nét – là nghiệm đúng, đường nét * là nghiệm xấp xỉ (mật độ tính toán được tại thời điểm sau 1 giờ đồng hồ).

5. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi thiết kế được lược đồ sai phân tìm mật độ giao thông cho bài toán không thuần nhất với điều kiện biên hỗn hợp. Chúng tôi chứng minh được lược đồ sai phân là ổn định và hội tụ với độ chính xác là cấp một đối với bước lưới thời gian và cấp hai đối với bước lưới không gian khi đặt ra điều kiện giới hạn về tỷ số giữa các bước lưới này. Các kết quả tính toán theo lược đồ sai phân được thực hiện trên môi trường Matlab 2014, kết quả số đã khẳng định được sự hội tụ của phương pháp và phù hợp với lý thuyết đưa ra trong bài báo.

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

- [1] M. Herty, A. Klar, and A. K. Singh, "An ODE traffic network model," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 203, pp. 419-436, 2007.
- [2] A. Salaam and A. Alkhazraji, "Traffic Flow Problem with Differential Equation," *AL-Fatih Journal*, vol. 35, pp. 39-46, 2008.
- [3] M. H. Holmes, *Introduction to the Foundations of Applied Mathematics*, Springer-Verlag New York, 2009.

-
- [4] M. O. Gani, M. M. Hossain, and L. S. Andallah, "A finite difference scheme for a fluid dynamic traffic flow model appended with two point boundary condition," *J. Bangladesh Math. Soc. (ISSN 1606-3694)*, vol. 31, pp. 43-52, 2011.
 - [5] E. S. Canepa and C. G. Claudel, "Exact solutions to traffic density estimation problems involving the Lighthill-Whitham-Richards traffic flow model using Mixed Integer Programming," *15th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems*, 2012, pp. 832-839.
 - [6] W. -L. Jin, "A multi-commodity Lighthill-Whitham-Richards model of lane-changing traffic flow," *Procedia - Social and Behavioral Sciences* 80, 2013, pp. 658-677.
 - [7] N. Sultana, M. Parvin, R. Sarker, and L. S. Andallah, "Simulation of Traffic Flow Model with Traffic Controller Boundary," *International Journal of Science and Engineering*, *International Journal of Science and Engineering*, vol. 5, no. 1, pp. 25-30, 2013.
 - [8] M. Burger, S. Götlich, and T. Jung, "Derivation of a first order traffic flow model of Lighthill-Whitham-Richards type," *IFAC Papers OnLine*, vol. 51, no. 9, pp. 49-54, 2018.
 - [9] G. Bretti, E. Cristiani, C. Lattanzio, A. Maurizi, and B. Piccoli, "Two algorithms for a fully coupled and consistently macroscopic PDE-ODE system modeling a moving bottleneck on a road," *Mathematics in Engineering*, vol. 1, no. 1, pp. 55-83, 2019.
 - [10] T. Liard, R. Stern, and M. L. D. Monache, "Optimal driving strategies for traffic control with autonomous vehicles," *Preprints of the 21st IFAC World Congress (Virtual) Berlin, Germany*, pp. 5396-5403, 2020.