ON THE SOLUTION SET OF GENERALIZED QUASI-HOMOGENEOUS COMPLEMENTARITY PROBLEMS

Hoang Kim Chi [*], Vu Tuan Anh, Hoang Van Hung
Vietnam Maritime University

ARTICLE INFO

Received: 09/12/2021

Revised: 19/4/2022

Published: 21/4/2022

KEYWORDS

Generalized complementarity problem

p-degree quasi-homogeneous map

Generalized quasi-homogeneous complementarity problem

Exceptionally regular pair of positively homogeneous maps for cone K

Exceptional family of elements for generalized complementarity problems

ABSTRACT

This paper investigates the properties of the solution set for generalized quasi-homogeneous complementarity problems. The authors introduce the concept of p-degree quasi-homogeneous maps with p>0. Using the concepts of exceptionally regular pair of positively homogeneous maps for cone K, exceptional family of elements for generalized complementarity problems and the properties of p-degree quasi-homogeneous maps, the authors proved a sufficient condition for compactness and non-emptiness of the solution set for generalized quasi-homogeneous complementarity problems. The class of p-degree quasi-homogeneous maps with p>0 properly contains the class of polynomial maps. So, the obtained result is better a result of L.Ling, C.Ling, H.He [Pac. J. Optim, 16(1) 155-174, 2020.] about the properties of the solution set for generalized polynomial complementarity problems.

VỀ TẬP NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN BÙ TỰA THUẦN NHẤT TỔNG QUÁT

Hoàng Kim Chi[*], Vũ Tuấn Anh, Hoàng Văn Hùng
Trường Đại học Hàng hải Việt Nam

THÔNG TIN BÀI BÁO

Ngày nhận bài: 09/12/2021

Ngày hoàn thiện: 19/4/2022

Ngày đăng: 21/4/2022

TỪ KHÓA

Bài toán bù tổng quát

Ánh xạ tựa thuần nhất bậc p

Bài toán bù tựa thuần nhất tổng quát

Cặp ánh xạ thuần nhất dương chính quy ngoại trừ đối với nón K

Dãy ngoại trừ đối với bài toán bù tổng quát

TÓM TẮT

Bài báo này nghiên cứu tính chất tập nghiệm của bài toán bù tựa thuần nhất tổng quát. Các tác giả giới thiệu khái niệm ánh xạ tựa thuần nhất bậc p với p >0. Dùng các khái niệm cặp ánh xạ thuần nhất dương chính quy ngoại trừ đối với nón K, dãy ngoại trừ đối với bài toán bù tổng quát và tính chất của các ánh xạ tựa thuần nhất bậc p>0, các tác giả đã chứng minh một điều kiện đủ cho tính khác rỗng và tính compact của tập nghiệm đối với bài toán bù tựa thuần nhất tổng quát. Lớp các ánh xạ tựa thuần nhất bậc p >0 chứa lớp các ánh xạ đa thức như một lớp con thực sự. Do đó, kết quả thu được tổng quát hơn một kết quả của L.Ling, C.Ling, H.He [Pac. J. Optim, 16(1) 155-174, 2020] về tính chất của tập nghiệm đối với bài toán bù đa thức tổng quát.

DOI: https://doi.org/10.34238/tnu-jst.5337

[*] Corresponding author. *Email: kimchi2587@vimaru.edu.vn*

1. Đặt vấn đề

Trong khoảng 20 năm gần đây, bài toán bù trong lý thuyết tối ưu được đề cập đến một cách khá mạnh mẽ [1]-[8]. Sở dĩ như vậy vì bài toán bù không chỉ là một bài toán quan trọng của lý thuyết tối ưu, mà còn liên quan đến bài toán cân bằng, một bài toán nảy sinh trong nhiều lĩnh vực như: lý thuyết trò chơi, kinh tế học (điểm cân bằng Walras, cân bằng giá không gian), cơ học (cơ học kết cấu, cơ học tiếp xúc), bài toán cân bằng giao thông... Mối liên quan giữa bài toán bù và bài toán cân bằng cũng như tổng quan về các loại bài toán bù và ứng dụng có thể xem trong [1]. Bài toán bù đa thức tổng quát và tính chất tập nghiệm của bài toán này được nghiên cứu trong [2]-[4]. Nói riêng, định lý 3.1 của bài báo [2] cho một điều kiện đủ để tập nghiệm của bài toán bù đa thức tổng quát là một tập compact khác rỗng. Trong bài báo này chúng tôi chỉ ra rằng định lý 3.1 [2] vẫn còn đúng nếu thay các ánh xạ đa thức $F(x), G(x)$ trong định lý đó [2] bằng các ánh xạ tổng quát hơn, được chúng tôi gọi là các ánh xạ tựa thuần nhất.

Dưới đây không gian véc tơ thực n-chiều sẽ được ký hiệu bởi $\mathbf{R^n}$, tích vô hướng của các véc tơ $u, v \in \mathbf{R^n}$ được ký hiệu bởi $\langle u, v\rangle$, chuẩn Euclid của véc tơ $x \in \mathbf{R^n}$ ký hiệu bởi $\|x\|$, $\mathbf{R}_+ = \{t \in \mathbf{R} : t \geq 0\}$. Nón đối ngẫu K^* của nón lồi K trong $\mathbf{R^n}$ được định nghĩa bởi:

$$K^* = \{u \in \mathbf{R^n} : < x, u >\geq 0 \ \ (\forall x \in K)\};$$

K^* luôn là một nón lồi đóng trong $\mathbf{R^n}$. Nếu K là nón lồi đóng trong $\mathbf{R^n}$ thì $K^{**} = (K^*)^* = K$.

2. Các khái niệm

Định nghĩa 1.1: Cho hai ánh xạ liên tục S, T từ $\mathbf{R^n}$ vào $\mathbf{R^n}$ và nón lồi đóng K trong $\mathbf{R^n}$. Bài toán tìm $x \in \mathbf{R^n}$ sao cho $S(x) \in K, T(x) \in K^*$ và $\langle S(x), T(x)\rangle = 0$ gọi là bài toán bù tổng quát, ký hiệu bởi $GCP(S,T,K)$. Tập nghiệm của bài toán $GCP(S,T,K)$ được ký hiệu là $SOL(S,T,K)$.

Định nghĩa 1.2: Ánh xạ $H : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^k}$ được gọi là thuần nhất dương bậc $p \in \mathbf{R}$ nếu với mọi $t > 0$, mọi $x \in \mathbf{R^n}$ ta có $H(tx) = t^p H(x)$.

Ví dụ: Các ánh xạ $H(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2, x_1x_2), G(x_1, x_2) = (\sqrt[3]{x_1^6 + x_2^6}, (x_1 + x_2)^2)$ là các ánh xạ thuần nhất dương bậc 2 từ $\mathbf{R^2}$ vào $\mathbf{R^2}$.

Định nghĩa 1.3: Cho ánh xạ $F : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^n}$, ta viết $F = 0(\|x\|^p)$ $(p > 0)$ nếu:

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{F(x)}{\|x\|^p} = 0.$$

Định nghĩa 1.4: Ánh xạ $T : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^n}$ được gọi là một ánh xạ tựa thuần nhất bậc $p > 0$ nếu có thể biểu diễn $T = H + F$, trong đó H là một ánh xạ thuần nhất dương bậc p và $F = 0(\|x\|^p)$. Lớp các ánh xạ tựa thuần nhất bậc p được ký hiệu bởi $H(p, 0(p))$.

Nhận xét 1: Dễ thấy rằng $T(x) = \sum_{k=1}^{m-1} A^{(k)} x^{m-k} + a$, trong đó $x, a \in \mathbf{R^n}, m \geq 2$, $A^{(k)}$ là tensor vuông n-chiều ($n \geq 1$) cấp $m-k$, là một ánh xạ thuộc $H(m-1, 0(m-1))$.

Phỏng theo định nghĩa 2.4 trong [2], chúng tôi đưa ra khái niệm cặp ánh xạ thuần nhất dương chính quy ngoại trừ đối với một nón lồi đóng K trong $\mathbf{R^n}$ như sau:

Định nghĩa 1.5: Cho nón lồi đóng K và H, G là hai ánh xạ thuần nhất dương tương ứng bậc p, q từ $\mathbf{R^n}$ vào $\mathbf{R^n}$. Ta nói rằng H, G là một cặp chính quy ngoại trừ đối với K nếu **không tồn tại** bộ ba $(x,t,s) \in (\mathbf{R^n} \setminus \{0\}) \times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$ thỏa mãn các điều kiện sau:

(ER1): $H(x) + tx \in K, G(x) + sx \in K^*$;

(ER2): $\langle H(x) + tx, G(x) + sx \rangle = 0$.

Định nghĩa 1.6: Ánh xạ $T : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^n}$ được gọi là xác định dương trên $\mathbf{R^n}$ nếu:

$$\langle x, Tx \rangle > 0, \forall x \in \mathbf{R^n} \setminus \{0\}.$$

Nhận xét 2: Các ánh xạ tuyến tính từ $\mathbf{R^n}$ vào $\mathbf{R^n}$ cho bởi các ma trận vuông cấp n đối xứng và xác định dương A là ví dụ về một ánh xạ thuần nhất dương bậc 1 xác định dương trên $\mathbf{R^n}$. Ánh xạ $T : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^2}$ cho bởi công thức:

$$T(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_1^3 e^{-|x_2/x_1|}, x_2^3) & khi\ x_1 \neq 0; \\ (0, x_2^3) & khi\ x_1 = 0 \end{cases}$$

là ví dụ về một ánh xạ liên tục, thuần nhất dương bậc 3 và xác định dương trên $\mathbf{R^2}$, nhưng không thuộc lớp các ánh xạ đa thức.

Định nghĩa 1.7: Tập nghiệm $SOL(S,T,K)$ khi S,T là các ánh xạ tựa thuần nhất bậc p, q tương ứng gọi là tập nghiệm của bài toán bù tựa thuần nhất tổng quát.

Sơ đồ chứng minh kết quả chính của chúng tôi tương tự như chứng minh của định lý 3.1 trong [2] nên chúng tôi cũng cần đến khái niệm dãy ngoại trừ được khảo sát trong [5]-[7]:

Định nghĩa 1.8: Cho hai ánh xạ liên tục S,T từ $\mathbf{R^n}$ vào $\mathbf{R^n}$ và nón lồi đóng K trong $\mathbf{R^n}$. Dãy $\{x^{(i)}\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbf{R^n}$ gọi là một dãy ngoại trừ đối với bài toán $GCP(S,T,K)$ nếu:

1) $\lim_{i\to\infty} \|x^{(i)}\| = \infty$;

2) Tồn tại một dãy các số dương $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

$$S(x^{(i)}) + \mu_i x^{(i)} \in K, T(x^{(i)}) + \mu_i x^{(i)} \in K^*, \langle S(x^{(i)}) + \mu_i x^{(i)}, T(x^{(i)}) + \mu_i x^{(i)} \rangle = 0.$$

Bổ đề quan trọng sau đây được chứng minh trong [7] và được chứng minh lại trong [2]:

Bổ đề 1.1: Cho các ánh xạ liên tục S,T từ $\mathbf{R^n}$ vào $\mathbf{R^n}$ và nón lồi đóng K trong $\mathbf{R^n}$. Hai khả năng sau loại trừ nhau:

1) $SOL(S,T,K) \neq \varnothing$;

2) Tồn tại dãy ngoại trừ $\{x^{(i)}\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbf{R^n}$ đối với bài toán $GCP(S,T,K)$.

Một trong các kết quả chính của bài báo [2] là định lý sau (định lý 3.1,[2]), chúng tôi diễn đạt lại để tránh sử dụng các ký hiệu cồng kềnh trong [2]:

Định lý 1.2: Giả sử K là nón lồi đóng trong $\mathbf{R^n}$ và :

1) S,T là các ánh xạ đa thức từ $\mathbf{R^n}$ vào $\mathbf{R^n}$ cho bởi các công thức :

$$S(x) = \sum_{k=1}^{m-1} A^{(k)} x^{m-k} + a, T(x) = \sum_{j=1}^{l-1} B^{(j)} x^{l-j} + b \qquad (x, a, b \in \mathbf{R^n}),$$

trong đó $A^{(k)}, B^{(j)}$ là các tensor vuông n-chiều cấp $m-k, l-j$ tương ứng;

2) $A^{(1)}, B^{(1)}$ là cặp ánh xạ chính quy ngoại trừ đối với nón K;

3) Nếu $m > l$ thì $A^{(1)}$ xác định dương trên $\mathbf{R^n}$, nếu $m < l$ thì $B^{(1)}$ xác định dương trên $\mathbf{R^n}$.

Khi đó $SOL(S,T,K) \neq \varnothing$ và là tập compact trong $\mathbf{R^n}$.

Mở rộng định lý trên từ lớp các ánh xạ đa thức sang lớp các ánh xạ tựa thuần nhất là mục đích của bài báo này.

3. Kết quả chính

Trong mục này chúng tôi chứng minh định lý sau:

Định lý 2.1: Giả sử K là nón lồi đóng trong $\mathbf{R^n}$ và :

1) S,T là các ánh xạ tựa thuần nhất từ $\mathbf{R^n}$ vào $\mathbf{R^n}$ cho bởi các công thức :

$$S = H_p + F \in H(p,0(p)),\ T = K_q + G \in H(q,0(q)),$$

trong đó p,q là các số dương; H_p, K_q là các ánh xạ liên tục, thuần nhất dương bậc p,q (tương ứng) từ $\mathbf{R^n}$ vào $\mathbf{R^n}$ và $F = 0(\|x\|^p), G = 0(\|x\|^q)$ là các ánh xạ liên tục từ $\mathbf{R^n}$ vào $\mathbf{R^n}$;

2) H_p, K_q là cặp ánh xạ chính quy ngoại trừ đối với nón K;

3) Nếu $p > q$ thì H_p là ánh xạ xác định dương trên $\mathbf{R^n}$, nếu $q > p$ thì K_q là ánh xạ xác định dương trên $\mathbf{R^n}$.

Khi đó $SOL(S,T,K) \neq \varnothing$ và là tập compact trong $\mathbf{R^n}$.

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh $SOL(S,T,K) \neq \varnothing$.

Giả sử trái lại $SOL(S,T,K) = \varnothing$. Khi đó theo bổ đề 1.1 tồn tại dãy ngoại trừ $\{x^{(i)}\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbf{R^n}$ đối với bài toán $GCP(S,T,K)$. Vậy tồn tại dãy số dương $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$ sao cho:

$$0 = \left\langle S(x^{(i)}) + \mu_i x^{(i)}, T(x^{(i)}) + \mu_i x^{(i)} \right\rangle \tag{1}$$

$$S(x^{(i)}) + \mu_i x^{(i)} \in K, T(x^{(i)}) + \mu_i x^{(i)} \in K^* \tag{2}$$

trong đó $\lim\limits_{i\to\infty} \|x^{(i)}\| = \infty$.

Từ (1) và biểu diễn của các ánh xạ S,T ta nhận được:

$$0 = \left\langle H_p(x^{(i)}) + F(x^{(i)}) + \mu_i x^{(i)}, K_q(x^{(i)}) + G(x^{(i)}) + \mu_i x^{(i)} \right\rangle \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle H_p(x^{(i)}) + F(x^{(i)}), K_q(x^{(i)}) + G(x^{(i)}) \right\rangle + \\ &\mu_i \left\langle x^{(i)}, H_p(x^{(i)}) + F(x^{(i)}) + K_q(x^{(i)}) + G(x^{(i)}) \right\rangle + \mu_i^2 \|x^{(i)}\|^2 \end{aligned} \tag{3}$$

Do K là nón lồi đóng ta có $K^{**} = K$, vậy vai trò của các số p,q là như nhau trong giả thiết của định lý 2.1. Do đó, không giảm tổng quát ta có thể xem $p \geq q$. Đặt $t_i = \dfrac{\mu_i}{\|x^{(i)}\|^{q-1}}$. Ta khẳng định rằng dãy $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ bị chặn. Thực vậy, nếu dãy $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ không bị chặn thì thay $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ bằng dãy con của nó nếu cần, ta có thể xem $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ là dãy dần tới vô cực. Chia cả hai vế của (3) cho $\|x^{(i)}\|^{p+q}$ ta nhận được:

$$0 = \frac{\left\langle H_p(x^{(i)}) + F(x^{(i)}), K_q(x^{(i)}) + G(x^{(i)}) \right\rangle}{\|x^{(i)}\|^{p+q}} +$$

$$\frac{t_i}{\|x^{(i)}\|^{p+1}} \left\langle x^{(i)}, H_p(x^{(i)}) + F(x^{(i)}) + K_q(x^{(i)}) + G(x^{(i)}) \right\rangle + \frac{t_i^2}{\|x^{(i)}\|^{p-q}}$$

$$\Leftrightarrow 0=\left\langle \frac{H_p(x^{(i)})+F(x^{(i)})}{\left\|x^{(i)}\right\|^p},\frac{K_q(x^{(i)})+G(x^{(i)})}{\left\|x^{(i)}\right\|^q}\right\rangle +$$
$$\frac{t_i}{\left\|x^{(i)}\right\|^{p+1}}\left\langle x^{(i)},H_p(x^{(i)})+F(x^{(i)})+K_q(x^{(i)})+G(x^{(i)})\right\rangle+\frac{t_i^2}{\left\|x^{(i)}\right\|^{p-q}} \tag{4}$$

Dùng tính p-thuần nhất dương (tương ứng q-thuần nhất dương) của các ánh xạ H_p, K_q ta có thể viết lại (4) dưới dạng:

$$0=\left\langle H_p(\frac{x^{(i)}}{\left\|x^{(i)}\right\|})+\frac{F(x^{(i)})}{\left\|x^{(i)}\right\|^p},K_q(\frac{x^{(i)}}{\left\|x^{(i)}\right\|})+\frac{G(x^{(i)})}{\left\|x^{(i)}\right\|^q}\right\rangle+$$
$$t_i\left\langle \frac{x^{(i)}}{\left\|x^{(i)}\right\|},H_p(\frac{x^{(i)}}{\left\|x^{(i)}\right\|})+\frac{F(x^{(i)})}{\left\|x^{(i)}\right\|^p}+\frac{1}{\left\|x^{(i)}\right\|^{p-q}}K_q(\frac{x^{(i)}}{\left\|x^{(i)}\right\|})+\frac{G(x^{(i)})}{\left\|x^{(i)}\right\|^p}\right\rangle+\frac{t_i^2}{\left\|x^{(i)}\right\|^{p-q}} \tag{5}$$

Nhận xét 3: Bởi vì mặt cầu đơn vị trong không gian $\mathbf{R^n}$ là tập compact, H_p, K_q là các ánh xạ liên tục từ $\mathbf{R^n}$ vào $\mathbf{R^n}$, $F=0(\|x\|^p), G=0(\|x\|^q)$ thì dễ thấy số hạng thứ nhất ở vế phải của (5) là đại lượng bị chặn khi $\left\|x^{(i)}\right\|$ đủ lớn. Để chứng tỏ rằng giả thiết $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ là dãy dần tới vô cực dẫn tới mâu thuẫn ta phân biệt hai trường hợp:

Trường hợp 1: $p=q$. Trong trường hợp này (5) trở thành:

$$0=\left\langle H_p(\frac{x^{(i)}}{\left\|x^{(i)}\right\|})+\frac{F(x^{(i)})}{\left\|x^{(i)}\right\|^p},K_p(\frac{x^{(i)}}{\left\|x^{(i)}\right\|})+\frac{G(x^{(i)})}{\left\|x^{(i)}\right\|^p}\right\rangle+$$
$$t_i\left\langle \frac{x^{(i)}}{\left\|x^{(i)}\right\|},H_p(\frac{x^{(i)}}{\left\|x^{(i)}\right\|})+\frac{F(x^{(i)})}{\left\|x^{(i)}\right\|^p}+K_p(\frac{x^{(i)}}{\left\|x^{(i)}\right\|})+\frac{G(x^{(i)})}{\left\|x^{(i)}\right\|^p}\right\rangle+t_i^2 \tag{6}$$

Chia cả hai vế của (6) cho t_i^2 ta được:

$$0=\frac{1}{t_i^2}\left\langle H_p(\frac{x^{(i)}}{\left\|x^{(i)}\right\|})+\frac{F(x^{(i)})}{\left\|x^{(i)}\right\|^p},K_p(\frac{x^{(i)}}{\left\|x^{(i)}\right\|})+\frac{G(x^{(i)})}{\left\|x^{(i)}\right\|^p}\right\rangle+$$
$$\frac{1}{t_i}\left\langle \frac{x^{(i)}}{\left\|x^{(i)}\right\|},H_p(\frac{x^{(i)}}{\left\|x^{(i)}\right\|})+\frac{F(x^{(i)})}{\left\|x^{(i)}\right\|^p}+K_p(\frac{x^{(i)}}{\left\|x^{(i)}\right\|})+\frac{G(x^{(i)})}{\left\|x^{(i)}\right\|^p}\right\rangle+1 \tag{7}$$

Cho $i\to\infty$, dùng nhận xét 3 ở trên và nhớ rằng $t_i\to\infty,\left\|x^{(i)}\right\|\to\infty$ từ (7) ta nhận được mâu thuẫn 0=1.

Trường hợp 2: $p>q$. Trong trường hợp này từ (5) ta có bất đẳng thức:

$$0 \ge \left\langle H_p\left(\frac{x^{(i)}}{\|x^{(i)}\|}\right) + \frac{F(x^{(i)})}{\|x^{(i)}\|^p}, K_q\left(\frac{x^{(i)}}{\|x^{(i)}\|}\right) + \frac{G(x^{(i)})}{\|x^{(i)}\|^q} \right\rangle + t_i \left\langle \frac{x^{(i)}}{\|x^{(i)}\|}, H_p\left(\frac{x^{(i)}}{\|x^{(i)}\|}\right) + \frac{F(x^{(i)})}{\|x^{(i)}\|^p} + \frac{1}{\|x^{(i)}\|^{p-q}} K_q\left(\frac{x^{(i)}}{\|x^{(i)}\|}\right) + \frac{G(x^{(i)})}{\|x^{(i)}\|^p} \right\rangle \tag{8}$$

Bởi vì dãy $\{\nu^{(i)} = \frac{x^{(i)}}{\|x^{(i)}\|}\}_{i=1}^{\infty}$ là dãy thuộc mặt cầu đơn vị của $\mathbf{R}^\mathbf{n}$ thì từ tính compact của mặt cầu này ta suy ra có một dãy con của dãy $\{\nu^{(i)}\}$ hội tụ tới một phần tử $\bar{\nu}$ của mặt cầu đơn vị trong $\mathbf{R}^\mathbf{n}$.Thay dãy $\{\nu^{(i)}\}$ bằng dãy con của nó hội tụ tới $\bar{\nu}$ nếu cần, ta có thể coi chính dãy $\{\nu^{(i)}\}$ hội tụ tới $\bar{\nu}$. Do H_p xác định dương trên $\mathbf{R}^\mathbf{n}$ và $\|\bar{\nu}\| = 1$ ta có $\langle \bar{\nu}, H_p(\bar{\nu}) \rangle > 0$. Cho $i \to \infty$ trong (8) và lại dùng nhận xét 3, chú ý rằng khi $p > q$ hệ số của t_i trong vế phải (8) có giới hạn là $\langle \bar{\nu}, H_p(\bar{\nu}) \rangle > 0$ khi $i \to \infty$, ta nhận được mâu thuẫn $0 \ge +\infty$.

Các mâu thuẫn nhận được chứng tỏ rằng dãy $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ phải là dãy bị chặn. Các hệ thức (1), (2) bây giờ có thể viết lại dưới dạng:

$$0 = \left\langle H_p(x^{(i)}) + F(x^{(i)}) + t_i \|x^{(i)}\|^{q-1} x^{(i)}, K_q(x^{(i)}) + G(x^{(i)}) + t_i \|x^{(i)}\|^{q-1} x^{(i)} \right\rangle \tag{9}$$

$$H_p(x^{(i)}) + F(x^{(i)}) + t_i \|x^{(i)}\|^{q-1} x^{(i)} \in K, K_q(x^{(i)}) + G(x^{(i)}) + t_i \|x^{(i)}\|^{q-1} x^{(i)} \in K^* \tag{10}$$

Lại xét dãy $\{\nu^{(i)} = \frac{x^{(i)}}{\|x^{(i)}\|}\}_{i=1}^{\infty}$ và lý luận như trên, ta có thể xem rằng $\lim_{i\to\infty} \nu_i = \bar{\nu}$. Các hệ thức (9) và (10) trở thành:

$$0 = \left\langle H_p(x^{(i)}) + F(x^{(i)}) + t_i \|x^{(i)}\|^{q} \nu^{(i)}, K_q(x^{(i)}) + G(x^{(i)}) + t_i \|x^{(i)}\|^{q} \nu^{(i)} \right\rangle \tag{11}$$

$$H_p(x^{(i)}) + F(x^{(i)}) + t_i \|x^{(i)}\|^{q} \nu^{(i)} \in K, K_q(x^{(i)}) + G(x^{(i)}) + t_i \|x^{(i)}\|^{q} \nu^{(i)} \in K^* \tag{12}$$

Do dãy $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ bị chặn, bằng cách thay $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ bởi một dãy con hội tụ của nó nếu cần, ta có thể xem rằng $\lim_{i\to\infty} t_i = \bar{t} \ge 0$.

Xét trường hợp $p = q$: Từ các hệ thức (11), (12) suy ra:

$$0 = \left\langle H_p\left(\frac{x^{(i)}}{\|x^{(i)}\|}\right) + \frac{F(x^{(i)})}{\|x^{(i)}\|^p} + t_i \nu^{(i)}, K_p\left(\frac{x^{(i)}}{\|x^{(i)}\|}\right) + \frac{G(x^{(i)})}{\|x^{(i)}\|^p} + t_i \nu^{(i)} \right\rangle \tag{13}$$

$$H_p\left(\frac{x^{(i)}}{\|x^{(i)}\|}\right) + \frac{F(x^{(i)})}{\|x^{(i)}\|^p} + t_i \nu^{(i)} \in K, K_p\left(\frac{x^{(i)}}{\|x^{(i)}\|}\right) + \frac{G(x^{(i)})}{\|x^{(i)}\|^p} + t_i \nu^{(i)} \in K^* \tag{14}$$

Cho $i \to \infty$, từ các hệ thức (13), (14) ta nhận được:

$$\langle H_p(\bar{\nu}) + \bar{t}\bar{\nu}, K_p(\bar{\nu}) + \bar{t}\bar{\nu} \rangle = 0,\ H_p(\bar{\nu}) + \bar{t}\bar{\nu} \in K,\ K_p(\bar{\nu}) + \bar{t}\bar{\nu} \in K^* \tag{15}$$

Hệ thức (15) mâu thuẫn với giả thiết rằng cặp ánh xạ H_p, K_p là một cặp ánh xạ chính quy ngoại trừ đối với nón *K*.

Xét trường hợp $p > q$: Từ các hệ thức (11), (12) suy ra:

$$0 = \left\langle H_p(\frac{x^{(i)}}{\|x^{(i)}\|}) + \frac{F(x^{(i)})}{\|x^{(i)}\|^p} + \frac{t_i v^{(i)}}{\|x^{(i)}\|^{p-q}}, K_q(\frac{x^{(i)}}{\|x^{(i)}\|}) + \frac{G(x^{(i)})}{\|x^{(i)}\|^q} + t_i v^{(i)} \right\rangle \quad (16)$$

$$H_p(\frac{x^{(i)}}{\|x^{(i)}\|}) + \frac{F(x^{(i)})}{\|x^{(i)}\|^p} + \frac{t_i v^{(i)}}{\|x^{(i)}\|^{p-q}} \in K, K_q(\frac{x^{(i)}}{\|x^{(i)}\|}) + \frac{G(x^{(i)})}{\|x^{(i)}\|^q} + t_i v^{(i)} \in K^* \quad (17)$$

Do $p - q > 0$ và $\|x^{(i)}\| \to \infty$, cho $i \to \infty$ trong các hệ thức (16), (17) ta nhận được:

$$\left\langle H_p(\bar{v}), K_q(\bar{v}) + \bar{t}\bar{v} \right\rangle = 0,\ H_p(\bar{v}) \in K,\ \ K_q(\bar{v}) + \bar{t}\bar{v} \in K^* \quad (18)$$

Các hệ thức (18) mâu thuẫn với giả thiết rằng cặp ánh xạ H_p, K_q là một cặp ánh xạ chính quy ngoại trừ đối với nón *K*.

Như vậy, giả thiết phản chứng $SOL(S,T,K) = \varnothing$ dẫn tới mâu thuẫn với giả thiết 2) của định lý 2.1 về tính chính quy ngoại trừ đối với nón *K* của cặp ánh xạ H_p, K_q. Điều này chứng minh rằng $SOL(S,T,K) \neq \varnothing$.

Bây giờ ta chứng minh tính compact của tập $SOL(S,T,K)$. Giả sử $z \in \mathbf{R^n}$ là một điểm giới hạn của tập $SOL(S,T,K)$. Khi đó tồn tại một dãy $\{z^{(i)}\}_{i=1}^{\infty} \subset SOL(S,T,K)$ sao cho $z^{(i)} \to z$ khi $i \to \infty$. Vì $\{z^{(i)}\}_{i=1}^{\infty} \subset SOL(S,T,K)$ ta có:

$$S(z^{(i)}) \in K,\ T(z^{(i)}) \in K^*, \left\langle S(z^{(i)}), T(z^{(i)}) \right\rangle = 0 \quad (19)$$

Cho $i \to \infty$ trong (19) và dùng tính liên tục của các ánh xạ S, T, tính đóng của các nón K, K^* ta nhận được: $S(z) \in K,\ T(z) \in K^*, \left\langle S(z), T(z) \right\rangle = 0$.

Vậy $z \in SOL(S,T,K)$, nghĩa là $SOL(S,T,K)$ là tập đóng.

Tính bị chặn của tập $SOL(S,T,K)$ được chứng minh bằng phản chứng. Giả sử trái lại $SOL(S,T,K)$ không bị chặn. Khi đó tồn tại dãy $\{x^{(i)}\}_{i=1}^{\infty} \subset SOL(S,T,K)$ sao cho $\lim_{i\to\infty}\|x^{(i)}\| = +\infty$. Vậy ta có:

$$S(x^{(i)}) \in K,\ T(x^{(i)}) \in K^*, \left\langle S(x^{(i)}), T(x^{(i)}) \right\rangle = 0 \quad (20)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} H_p(x^{(i)}) + F(x^{(i)}) \in K,\ K_q(x^{(i)}) + G(x^{(i)}) \in K^*, \\ \left\langle H_p(x^{(i)}) + F(x^{(i)}), K_q(x^{(i)}) + G(x^{(i)}) \right\rangle = 0 \end{cases} \quad (21)$$

Dùng tính *p*-thuần nhất dương (tương ứng *q*-thuần nhất dương) của các ánh xạ H_p, K_q và tính chất của các nón, từ (21) ta nhận được:

$$\begin{cases} H_p(\frac{x^{(i)}}{\|x^{(i)}\|}) + \frac{F(x^{(i)})}{\|x^{(i)}\|^p} \in K,\ K_q(\frac{x^{(i)}}{\|x^{(i)}\|}) + \frac{G(x^{(i)})}{\|x^{(i)}\|^q} \in K^*, \\ \left\langle H_p(\frac{x^{(i)}}{\|x^{(i)}\|}) + \frac{F(x^{(i)})}{\|x^{(i)}\|^p}, K_q(\frac{x^{(i)}}{\|x^{(i)}\|}) + \frac{G(x^{(i)})}{\|x^{(i)}\|^q} \right\rangle = 0 \end{cases} \quad (22)$$

Lại do dãy $\{v^{(i)} = \frac{x^{(i)}}{\|x^{(i)}\|}\}_{i=1}^{\infty}$ là dãy thuộc mặt cầu đơn vị của $\mathbf{R^n}$, không mất tính tổng quát ta có thể xem dãy này hội tụ về phần tử $\bar{v}$ thuộc mặt cầu đơn vị của $\mathbf{R^n}$. Cho $i \to \infty$ trong (22) ta nhận được:

$$H_p(\bar{v}) \in K,\, K_q(\bar{v}) \in K^*, \left\langle H_p(\bar{v}),\, K_q(\bar{v}) \right\rangle = 0 \tag{23}$$

Các hệ thức (23) mâu thuẫn với tính chính quy ngoại trừ đối với nón K của cặp ánh xạ H_p, K_q. Vậy tập $SOL(S,T,K)$ là tập bị chặn. Ở trên ta đã chứng minh rằng $SOL(S,T,K)$ là tập đóng, do đó $SOL(S,T,K)$ là tập compact và chứng minh của định lý 2.1 kết thúc.

4. Kết luận

Từ các nhận xét 1 và nhận xét 2 ở trên suy ra rằng tập các ánh xạ đa thức là tập con thực sự của tập các ánh xạ tựa thuần nhất, do đó định lý 2.1 thực sự mạnh hơn định lý 1.2 (tức là định lý 3.1 [2]).

Lời cảm ơn

Bài báo này được tài trợ bởi Trường Đại học Hàng hải Việt Nam trong đề tài mã số DT21-22.92.

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

[1] S. C. Billups and K. G. Murty, “Complementarity problems,” *J. Computational and Applied Mathematics*, vol. 124, pp. 303-318, 2000.

[2] L. Ling, C. Ling, and H. He, “Properties of the solution set of generalized polynomial complementarity problems,” *Pac. J.Optim.*, vol. 16, pp. 155-174, 2020.

[3] L. Ling, H. He, and C. Ling, “On error bounds of polynomial complementarity problems with structured tensors,” *Optimization*, vol. 67, pp. 341-358, 2018.

[4] M. S. Gowda, “Polynomial complementarity problems,” *Pac.J.Optim.*, vol. 13, pp. 227-241, 2017.

[5] G. Isac, V. Bulavski, and V. Kalashnikov, “Exceptional families, topological degree and complementarity problems,” *J.Global Optim.*, vol. 10, pp. 207-225, 1997.

[6] G. Isac and A. Carbone, “Exceptional families of elements for continuous functions: some applications to complimentarity theory,” *J.Global Optim.*, vol. 15, pp. 181-196, 1999.

[7] V. V. Kalashnicov and G. Isac, “Solvability of implicit complementarity problems,” *Ann. Oper. Res.*, vol. 116, pp. 199-221, 2002.

[8] X. L. Bai, Z. H. Huang, and Y. Wang, “Global uniqueness and solvability for tensor complementarity problems,” *J. Optim. Theory Appl.*, vol. 170, pp. 72-84, 2016.