

UPPER BOUND FOR THE FIRST EULER-POINCARÉ CHARACTERISTICS OF KOZUL COMPLEXES RELATIVE TO PARAMETER IDEALS

Pham Hong Nam

TNU - University of Sciences

ARTICLE INFO	ABSTRACT
Received: 21/12/2021	Let (R, m) be a Noetherian local ring and M be a finitely generated R -module of dimension $\dim(M) = d \geq 1$. Let $Q = (x_1, \dots, x_d)$ be a parameter ideal of M . Denote by $H_i(Q; M)$ the i -th homology module of the Koszul $K_\bullet(Q; M)$ generated by the system $x_1, \dots, x_d$. Set $\chi_1(Q; M) = \sum_{i \geq 1} (-1)^i \ell(H_i(Q; M))$ and call it the first Euler-Poincaré characteristic of M relative to Q . In this paper, we study the upper bound for the first Euler-Poincaré characteristics of M relative to the parameter ideal Q . By using the unmixed degree, the multiplicity, and the superficial elements we give the upper bound for $\chi_1(Q; M)$ given by $\chi_1(Q; M) \leq \text{udeg}(Q; M) - e_0(Q; M)$, where $\text{udeg}(Q; M), e_0(Q; M)$ are the unmixed degree, the multiplicity of M with respect to Q , respectively.
Revised: 25/02/2022	
Published: 25/02/2022	
KEYWORDS	
Almost p-standard system of parameters	
Cohomological degree	
Multiplicity	
The first Euler-Poincaré characteristics	
Unmixed degree	

CHẶN TRÊN CHO ĐẶC TRƯNG EULER-POINCARÉ THỨ NHẤT CỦA PHỨC KOSZUL ĐỐI VỚI IDEAN THAM SỐ

Phạm Hồng Nam

Trường Đại học Khoa học – ĐH Thái Nguyên

THÔNG TIN BÀI BÁO	TÓM TẮT
Ngày nhận bài: 21/12/2021	Cho (R, m) là một vành Noether, địa phương và M là một R -môđun hữu hạn sinh có chiều là $\dim(M) = d$. Cho $Q = (x_1, \dots, x_d)$ là một idean tham số của M . Kí hiệu $H_i(Q; M)$ là môđun đồng điều thứ i của phức Koszul $K_\bullet(Q; M)$ sinh bởi hệ tham số $x_1, \dots, x_d$. Đặc trưng Euler-Poincaré thứ nhất của phức Koszul ứng với idean tham số Q được định nghĩa là
Ngày hoàn thiện: 25/02/2022	
Ngày đăng: 25/02/2022	
TỪ KHÓA	
Hệ tham số hầu p-chuẩn tắc	$\chi_1(Q; M) = \sum_{i \geq 1} (-1)^i \ell(H_i(Q; M)).$ Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu chặn trên cho đặc trưng Euler-Poincaré thứ nhất $\chi_1(Q; M)$ của phức Koszul ứng với idean tham số Q. Bằng cách sử dụng bậc không trộn lẫn, số bội và phần tử bề mặt (superficial) chúng tôi đưa ra chặn trên cho $\chi_1(Q; M)$ cho bởi $\chi_1(Q; M) \leq \text{udeg}(Q; M) - e_0(Q; M)$, ở đây $\text{udeg}(Q; M), e_0(Q; M)$ lần lượt là bậc không trộn lẫn, số bội của M đối với idean tham số Q.
Bậc đối đồng điều	
Số bội	
Đặc trưng Euler-Poincaré thứ nhất	
Bậc không trộn lẫn	

DOI: <https://doi.org/10.34238/tnu-jst.5367>

Email: namph@tnus.edu.vn

<http://jst.tnu.edu.vn>

135

Email: jst@tnu.edu.vn

1. Giới thiệu

Cho (R, m) là một vành giao hoán Noether, địa phương với ideal cực đại là m . Cho M là một R -môđun hữu hạn sinh có chiều là $\dim(M) = d$. Cho I là một ideal m -nguyên sơ trong R . Với mỗi R -môđun N , kí hiệu $\ell(N)$ là độ dài của môđun N . Khi đó tồn tại các số nguyên $e_0(I, M), e_1(I, M), \dots, e_d(I, M)$ sao cho

$$\ell(M / I^{n+1}M) = e_0(I, M) \binom{n+d}{d} - e_1(I, M) \binom{n+d-1}{d-1} + \dots + (-1)^d e_d(I, M) \quad (1)$$

với mọi n đủ lớn ($n \gg 0$). Hệ số $e_i(I, M)$ được gọi là hệ số Hilbert thứ i của M đối với I . Đặc biệt, hệ số $e_0(I, M)$ được gọi là số bội Hilbert-Samuel (hoặc số bội) của M đối với I .

Khái niệm *bậc đối đồng điều* (hay bậc mở rộng) được đưa ra bởi Doering, Gunston và Vasconcelos như là một thước đo độ phức tạp của cấu trúc đại số của vành và môđun [1]. Một bậc đối đồng điều là một hàm số đi từ phạm trù các môđun hữu hạn sinh trên vành địa phương (hoặc vành Noether phân bậc) đến vành các số nguyên $\mathbb{Z}$. Sử dụng bậc đối đồng điều Vasconcelos đã đưa ra các chặn trên cho một số bất biến số quan trọng của môđun hữu hạn sinh như số phần tử sinh, các hệ số Hilbert, các số Betti, chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của vành phân bậc, ... [1]-[3]. Ví dụ đầu tiên của bậc đối đồng điều là *bậc đối đồng điều* hdeg được Vasconcelos định nghĩa và nghiên cứu trước đó [3]. Ngay sau đó một học trò của Vasconcelos là Gunston đã đưa ra ví dụ thứ hai của bậc đối đồng điều bằng cách lấy giá trị nhỏ nhất của tất cả các bậc đối đồng điều, kí hiệu là bdeg. Năm 2015, Nguyễn Tự Cường và Phạm Hùng Quý đã đưa ra một bậc đối đồng điều khác gọi là bậc không trộn lẫn, kí hiệu là udeg bằng cách sử dụng các hệ số p-chuẩn tắc được Nguyễn Tự Cường định nghĩa trước đó [4]. Gần đây, bằng cách sử dụng số bội của các môđun $\bar{U}^{i,j}$ và các hệ tham số hầu p-chuẩn tắc được Đoàn Trung Cường và Phạm Hồng Nam đưa ra trước đó, hai tác giả này đã xây dựng một họ vô hạn các bậc đối đồng điều mới [5].

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu chặn trên cho đặc trưng Euler-Poincaré thứ nhất của môđun liên kết với hệ tham số bằng cách sử dụng bậc không trộn lẫn và số bội của môđun đối với hệ tham số đó. Cụ thể, cho $Q = (x_1, \dots, x_d)$ là một ideal tham số của M . Kí hiệu $H_i(Q; M)$ là môđun đồng điều thứ i của phức Koszul $K_\bullet(Q; M)$ sinh bởi hệ tham số $x_1, \dots, x_d$. Đặc trưng Euler-Poincaré thứ nhất của M đối với ideal tham số Q được định nghĩa là

$$\chi_1(Q; M) = \sum_{i \geq 1} (-1)^i \ell(H_i(Q; M)). \quad (2)$$

Từ định nghĩa ta suy ra $\chi_1(Q; M) = \ell(M / QM) - e_0(Q, M)$. Do đó

$$\chi_1(Q; M) = \ell(M / QM) - e_0(Q, M) \geq 0 \quad (3)$$

với mọi ideal tham số Q của M . Hơn nữa, M là một môđun Cohen-Macaulay nếu và chỉ nếu

$$\chi_1(Q; M) = \ell(M / QM) - e_0(Q, M) \leq 0 \quad (4)$$

với mọi (hoặc với một) ideal tham số Q của M và M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng nếu và chỉ nếu

$$\chi_1(Q; M) = \ell(M / QM) - e_0(Q, M) \leq I(M) \quad (5)$$

với mọi ideal tham số Q của M , ở đây $I(M) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \ell(H_m^i(M))$ là hằng số Buchsbaum

của M . Trong trường hợp tổng quát, một câu hỏi tự nhiên được đặt ra: Liệu rằng có tồn tại chặn trên cho $\chi_1(Q; M)$ với mọi ideal tham số Q của M ?

Kết quả chính của bài báo trả lời câu hỏi trên. Cụ thể ta có định lý sau:

Định lý 1.1. Cho M là một R -môđun hữu hạn sinh có chiều là $\dim(M) = d \geq 1$. Khi đó ta có

$$\chi_1(Q; M) \leq \text{udeg}(Q; M) - e_0(Q; M) \quad (6)$$

với mọi idêan tham số Q của M .

Cấu trúc của bài báo gồm ba phần chính. Phần đầu tiên giới thiệu vấn đề nghiên cứu và kết quả nghiên cứu đạt được. Phần thứ hai nhắc lại một số kiến thức dùng cho chứng minh kết quả chính. Phần cuối của bài báo trình bày kết quả nghiên cứu đạt được.

Trong suốt bài báo ta luôn xét (R, m, k) là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương và trường thặng dư k là vô hạn.

2. Một số kiến thức chuẩn bị

Trong tiết này chúng tôi nhắc lại một số tính chất của hệ tham số hầu p-chuẩn tắc và bậc đối đồng điều dùng cho các chứng minh ở các phần sau. Các chứng minh chi tiết có thể xem trong các tài liệu [2], [4], [6].

Cho M là một R -môđun hữu hạn sinh có chiều là $\dim(M) = d \geq 1$. Nhắc lại rằng, M là một môđun Cohen-Macaulay nếu và chỉ nếu

$$\chi_1(Q; M) = \ell(M / QM) - e_0(Q, M) = 0 \quad (7)$$

với mọi (hoặc với một) idêan tham số Q của M . Lưu ý rằng trong trường hợp tổng quát ta luôn có bất đẳng thức

$$\ell(M / QM) - e_0(Q, M) \geq 0 \quad (8)$$

với mọi idêan tham số Q của M .

Định nghĩa 2.1. Một R -môđun M hữu hạn sinh được gọi là môđun Cohen-Macaulay suy rộng nếu $\ell(M / QM) - e_0(Q, M) < \infty$ với mọi idêan tham số Q .

Khái niệm môđun Cohen-Macaulay suy rộng được đưa ra bởi Nguyễn Tự Cường, P. Schenzel và Ngô Việt Trung [6]. Trong các nghiên cứu về môđun Cohen-Macaulay suy rộng, khái niệm *hệ tham số chuẩn tắc* được sử dụng một cách hiệu quả. Khái niệm hệ tham số này được đưa ra bởi Ngô Việt Trung [7]. Ta biết rằng M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng khi và chỉ khi các môđun đối đồng điều địa phương $H_m^i(M)$ có độ dài hữu hạn với mọi $i < d$. Hơn nữa,

$$\chi_1(Q; M) = \ell(M / QM) - e_0(Q, M) \leq I(M) \quad (9)$$

với mọi idêan tham số Q của M , ở đây $I(M) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \ell(H_m^i(M))$ được gọi là *hằng số Buchsbaum* của M [7].

Định nghĩa 2.2. Một hệ tham số $x_1, \dots, x_d$ của M được gọi là *chuẩn tắc* nếu

$$\ell(M / (x_1, \dots, x_d)M) = e(x_1, \dots, x_d; M) + \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \ell(H_m^i(M)). \quad (10)$$

Bổ đề 2.3. [7, Hệ quả 4.2] Cho M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng và $x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số của M . Khi đó, các phát biểu sau là tương đương:

- (a) $x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số chuẩn tắc của M .
- (b) Với mỗi bộ các số nguyên $n_1, \dots, n_d > 0$, ta có

$$\ell(M / (x_1^{n_1}, \dots, x_d^{n_d})M) = n_1 \dots n_d e(x_1, \dots, x_d; M) + \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \ell(H_m^i(M)). \quad (11)$$

Từ Bổ đề 2.3, hàm độ dài $\ell(M / (x_1^{n_1}, \dots, x_d^{n_d})M)$ là một đa thức theo $n_1, \dots, n_d$ khi hệ tham số là chuẩn tắc. Trong trường hợp tổng quát, hàm độ dài $\ell(M / (x_1^{n_1}, \dots, x_d^{n_d})M)$ không là đa thức khi hệ tham

số $x_1, \dots, x_d$ là tùy ý. Tuy nhiên, khi hệ tham số $x_1, \dots, x_d$ là p-chuẩn tắc Nguyễn Tự Cường đã chỉ ra hàm độ dài $\ell(M / (x_1^{n_1}, \dots, x_d^{n_d})M)$ là một đa thức theo $n_1, \dots, n_d$. Hơn nữa, hệ số của đa thức này được tính qua số bội của các môđun con thương [8]. Với mỗi số nguyên $0 \leq i \leq d-1$, kí hiệu $a_i(M) := \text{Ann}_R(M)$ và đặt $a(M) := a_0(M) \dots a_{d-1}(M)$. Nhắc lại rằng, một hệ tham số $x_1, \dots, x_d$ được gọi là p-chuẩn tắc nếu $x_d \in a(M)$, $x_i \in a(M / (x_{i+1}, \dots, x_d)M)$, $i = d-1, \dots, 1$. Khi đó ta có định lý sau.

Định lý 2.4. [8, Định lý 2.6] Cho $x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số p-chuẩn tắc của M . Khi đó, ta có

$$\ell(M / (x_1^{n_1}, \dots, x_d^{n_d})M) = n_1 \dots n_d e(x_1, \dots, x_d; M) + \sum_{i=0}^{d-1} n_1 \dots n_i e(x_1, \dots, x_i; (0 : x_{i+1})_{M/(x_{i+2}, \dots, x_d)M}) \quad (12)$$

với mọi số nguyên dương $n_1, \dots, n_d > 0$.

Ngược lại, nếu đẳng thức là đúng thì $x_1^{n_1}, \dots, x_d^{n_d}$ là các hệ tham số p-chuẩn tắc với mọi $n_1 \geq 1, \dots, n_d \geq d$ (xem [9, Hệ quả 3.9]). Từ đẳng thức (12) ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa 2.5. [10, Định nghĩa 2.1] Một hệ tham số $x_1, \dots, x_d$ của M được gọi là hầu p-chuẩn tắc nếu tồn tại các số nguyên $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sao cho

$$\ell(M / (x_1^{n_1}, \dots, x_d^{n_d})M) = \sum_{i=0}^d \lambda_i n_1 \dots n_i \quad (13)$$

với mọi số nguyên dương $n_1, \dots, n_d > 0$.

Khái niệm hệ tham số hầu p-chuẩn tắc được đưa ra bởi Đoàn Trung Cường và Phạm Hồng Nam như là một mở rộng của khái niệm hệ tham số chuẩn tắc trong trường hợp môđun không là Cohen-Macaulay suy rộng. Tiếp theo ta nhắc lại một số tính chất quan trọng của hệ tham số hầu p-chuẩn tắc được dùng cho các chứng minh sau.

Chú ý 2.6. Cho M là một R -môđun hữu hạn sinh có chiều là $\dim(M) = d \geq 1$. Khi đó các phát biểu sau là đúng.

(a) [9, Hệ quả 3.6] Các hệ số $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ của hàm độ dài trong Định nghĩa 2.5 được tính bởi công thức $\lambda_i = e(x_1, \dots, x_i; (0 : x_{i+1})_{M/(x_{i+2}, \dots, x_d)M})$ với mọi $i = 0, 1, \dots, d$.

(b) [9, Hệ quả 3.6] Một hệ tham số $x_1, \dots, x_d$ của M là hầu p-chuẩn tắc khi và chỉ khi $x_1^{n_1}, \dots, x_i^{n_i}$ là một d-dãy trên $M / (x_{i+1}^{n_{i+1}}, \dots, x_d^{n_d})M$ với $i = 0, 1, \dots, d$ và với mọi số nguyên dương $n_1, \dots, n_d > 0$. Nhắc lại rằng, một dãy các phần tử $x_1, \dots, x_s \in m$ được gọi là d-dãy trên M nếu $(x_1, \dots, x_{i-1})M : x_j = (x_1, \dots, x_{i-1})M : x_i x_j$ với mọi $i = 0, 1, \dots, s$ và $j \geq i$.

Từ các tính chất của hệ tham số hầu p-chuẩn tắc ta có kết quả quan trọng sau.

Mệnh đề 2.7. [10, Mệnh đề 3.2 và Hệ quả 3.5] Cho M là một R -môđun hữu hạn sinh có chiều là $\dim(M) = d \geq 1$. Cho $x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M . Cho i, j là các số nguyên thỏa mãn $0 \leq i < j \leq d$. Khi đó các phát biểu sau là đúng.

(a) Các môđun con thương $(0 : x_{i+1})_{M/(x_{i+2}^{n_{i+2}}, \dots, x_j^{n_j})M}$ không phụ thuộc (sai khác một đẳng cấu) vào cách chọn hệ tham số hầu p-chuẩn tắc và các số nguyên $n_{i+2}, \dots, n_j > 1$. Các môđun này được kí hiệu là $U_M^{i,j}$.

(b) Giả sử $j > i + 1$. Khi đó tồn tại một đơn cấu $\varphi : U_M^{i,j-1} \rightarrow U_M^{i,j}$ sao cho $\text{Im}(\varphi)$ là một thành phần trực tiếp của $U_M^{i,j}$. Kí hiệu $\text{Coker}(\varphi)$ bởi $\bar{U}_M^{i,j}$, ta có một phân tích thành tổng trực tiếp cho bởi $U_M^{i,j} \simeq \bar{U}_M^{i,j} \oplus \bar{U}_M^{i,j-1} \oplus \dots \oplus \bar{U}_M^{i,i+2} \oplus U_M^{i,i+1}$.

Chú ý 2.8. Các môđun con thương $U_M^{i,j}$ chứa đựng nhiều thông tin quan trọng về cấu trúc của môđun M . Đơn giản nhất là trường hợp $U_M^{d-1,d} = 0 : x_d^2 = 0 : x_d = U_M(0)$, đây là môđun lớn nhất của M có chiều nhỏ hơn d . Ngoài ra, $U_M^{0,1} = 0 : x_1^2 = 0 : x_1 = H_m^0(M)$. Hơn nữa, ta luôn có

$$\dim(U_M^{i,j}) \leq \dim((0 : x_{i+1})_{M/(x_{i+2}^2, \dots, x_d^2)}) \leq i$$

với mọi số nguyên $0 \leq i < j \leq d$, ở đây $x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M .

Kí hiệu $\bar{U}_M^{i,i+1} := U_M^{i,i+1}$. Khi đó, M là Cohen-Macaulay khi và chỉ khi $U_M^{i,j} = 0$ với mọi $i < j$, khi và chỉ khi $\bar{U}_M^{i,j} = 0$ với mọi $i < j$. Do đó các môđun con thương này là các cản trở tính Cohen-Macaulay của M . Trong trường hợp môđun là Cohen-Macaulay suy rộng ta có thể tính toán các cản trở này thông qua các môđun đối đồng điều địa phương.

Bổ đề 2.9. [5, Bổ đề 2.4] Cho M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng có chiều là $d \geq 1$. Khi đó

$$U_M^{i,j} \simeq \bigoplus_{t=0}^{j-i-1} H_m^t(M)^{\oplus \binom{j-i-1}{t}}, \quad \bar{U}_M^{i,j} \simeq \bigoplus_{t=1}^{j-i-1} H_m^t(M)^{\oplus \binom{j-i-2}{t-1}} \quad (14)$$

với mọi $0 \leq i < j \leq d$.

Phần tiếp theo của tiết này dành để trình bày về bậc đối đồng điều. Trước tiên ta nhắc lại khái niệm về phần tử bề mặt (superficial).

Định nghĩa 2.10. Cho I là một ideal m -nguyên sơ. Một phần tử $a \in I \setminus mI$ được gọi là một phần tử bề mặt của M đối với I nếu tồn tại một số nguyên dương c thỏa mãn

$$(I^{n+1}M :_M a) \cap I^c M = I^n M \quad (15)$$

với mọi số nguyên $n \geq c$.

Chú ý 2.11. Cho I là một ideal m -nguyên sơ của R . Khi đó các phát biểu sau là đúng:

(a) Cho $G_I(R) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n / I^{n+1}$ là vành phân bậc liên kết của R đối với I và $G_I(M) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n M / I^{n+1} M$ là $G_I(R)$ -môđun phân bậc liên kết của R đối với I . Đặt $G_I(R)_+ := \bigoplus_{n \geq 1} I^n / I^{n+1}$ thì $G_I(R)_+$ là một ideal của $G_I(R)$. Khi đó $a \in I \setminus mI$ là một phần tử bề mặt của M đối với I nếu và chỉ nếu ảnh a^* của a trong vành $G_I(R)$ là phần tử $G_I(R)_+$ -lọc chính quy của $G_I(M)$, nghĩa là $\ell(0 :_{G_I(M)} a^*) < \infty$.

(b) Phần tử bề mặt của M đối với I luôn tồn tại nếu trường thặng dư $k = R/m$ là vô hạn. Ta luôn có thể giả sử k là vô hạn, vì có thể thay vành R bởi vành địa phương $R[X]_{mR[X]}$, ở đây X là biến. Vì thế trong bài báo này ta luôn giả thiết trường thặng dư k là vô hạn.

Một trong những tính chất tốt của phần tử bề mặt liên quan đến các hệ số Hilbert là kết quả sau.

Bổ đề 2.12. [11, Mệnh đề 1.3.2] Cho I là một ideal m -nguyên sơ của R và $a \in I \setminus mI$ là một phần tử bề mặt của M đối với I . Đặt $\bar{I} = I/aR$ và $\bar{M} = M/aM$. Khi đó, ta có $e_i(I, M) = e_i(\bar{I}, \bar{M})$ với $i = 0, 1, \dots, d-2$ và $e_{d-1}(I, M) = e_{d-1}(\bar{I}, \bar{M}) + (-1)^d \ell(0 :_M a)$.

Kí hiệu Mod_R là phạm trù các môđun hữu hạn sinh trên vành R và L là tập các tập con khác rỗng của I/mI . Ta nhắc lại định nghĩa khái niệm tổng quát (notion of genericity) của Doering, Gunston và Vasconcelos [1].

Định nghĩa 2.13. Một khái niệm tổng quát trên Mod_R đối với I là một ánh xạ $U : \text{Mod}_R \rightarrow L$ thỏa mãn các điều kiện sau với mỗi $M \in \text{Mod}_R$:

- (a) Nếu $a - b \in mI$ thì $a \in U(M)$ khi và chỉ khi $b \in U(M)$.
- (b) Ảnh của tập $U(M)$ chứa một tập con mở khác rỗng trong k -không gian affin I/mI đối với tôpô Zariski.
- (c) Nếu $\text{depth}(I, M) > 0$ và $a \in U(M)$ thì a là phần tử M -chính quy.
- Cố định một khái niệm tổng quát $U(-)$. Với mỗi $M \in \text{Mod}_R$, phần tử $a \in U(M)$ được gọi là một *phần tử tổng quát* của M đối với I .

Định nghĩa 2.14. Cho I là một ideal m -nguyên sơ của R . Một *bậc đối đồng điều* (hay bậc mở rộng) của R đối với I là một hàm $\text{Deg}_I : \text{Mod}_R \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ thỏa mãn các điều kiện sau với mỗi $M \in \text{Mod}_R$:

- (a) $\text{Deg}_I(M) = \text{Deg}_I\left(\frac{M}{H_m^0(M)}\right) + \ell(H_m^0(M))$.
- (b) Tồn tại một khái niệm tổng quát U trên Mod_R đối với I sao cho nếu $\text{depth}(I, M) > 0$ thì $\text{Deg}_I(M) \geq \text{Deg}_I\left(\frac{M}{aM}\right)$ với mọi $a \in U(M)$.
- (c) Nếu M là Cohen-Macaulay thì $\text{Deg}_I(M) = e_0(I, M)$.

Ví dụ đầu tiên của bậc đối đồng điều là bậc đồng điều $\text{heg}_I(-)$ được đưa ra bởi Vasconcelos trước đó. Gần đây, Nguyễn Tự Cường và Phạm Hùng Quý đã đưa ra khái niệm bậc không trộn lẫn và chỉ ra rằng bậc không trộn lẫn cũng là một bậc đối đồng điều [4, Định lý 5.18]. Cụ thể với mỗi môđun hữu hạn sinh N và số nguyên dương i , đặt $e(I, M)_i = e_0(I, M)$ nếu $i = \dim(N)$ và $e(I, M)_i = 0$ nếu $i \neq \dim(N)$. Khi đó ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa 2.15. Bậc không trộn lẫn của M đối với I được định nghĩa là

$$\text{udeg}_I(M) = e_0(I, M) + \sum_{i=0}^{d-1} e(I, U_M^{i,j})_i. \quad (16)$$

Hệ quả 2.16. Cho M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng có chiều là $d \geq 1$. Khi đó, ta có

$$\text{udeg}_I(M) = e_0(I, M) + \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \ell(H_m^i(M)). \quad (17)$$

Chứng minh. Theo Bổ đề 2.9 các môđun $U_M^{i,j}$ có độ dài hữu hạn với mọi $i = 0, 1, \dots, d-1$. Suy ra $e(I, M)_i = 0$ với mọi $i = 1, \dots, d-1$. Do đó theo Bổ đề 2.9 ta có

$$\text{udeg}_I(M) = e_0(I, M) + \ell(U_M^{0,d}) = e_0(I, M) + \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \ell(H_m^i(M)).$$

3. Kết quả chính

Trong tiết này chúng tôi đưa ra chặn trên cho đặc trưng Euler-Poincaré thứ nhất của phức Koszul đối với ideal tham số. Cụ thể, cho $Q = (x_1, \dots, x_d)$ là một ideal tham số của M . Ký hiệu $H_i(Q; M)$ là môđun đồng điều thứ i của phức Koszul $K_\bullet(Q; M)$ sinh bởi hệ tham số $x_1, \dots, x_d$. Đặc trưng Euler-Poincaré thứ nhất của M đối với ideal tham số Q được định nghĩa là

$$\chi_1(Q; M) = \sum_{i \geq 1} (-1)^i \ell(H_i(Q; M)). \quad (18)$$

Khi đó ta có bổ đề sau.

Bổ đề 3.1. [12, Bổ đề 3.1] Cho M là một môđun hữu hạn sinh có chiều $d \geq 2$ và Q là một ideal tham số của M . Cho $a \in Q \setminus mQ$ là một phần tử bề mặt của M đối với Q . Khi đó, ta có

$$\chi_1(Q; M) = \chi_1(\overline{Q}; \overline{M}) \quad (19)$$

trong đó $\overline{M} = M/aM$ và $\overline{Q} = Q/aR$.

Chứng minh. Theo Bổ đề 2.12 ta có $e_0(Q, M) = e_0(\overline{Q}, \overline{M})$. Do đó

$$\begin{aligned}\chi_1(Q; M) &= \ell\left(\frac{M}{QM}\right) - e_0(Q, M) = \ell\left(\frac{\overline{M}}{\overline{QM}}\right) - e_0(\overline{Q}, \overline{M}) = \chi_1(\overline{Q}; \overline{M}) \\ &\text{vì } \ell\left(\frac{M}{QM}\right) = \ell\left(\frac{\overline{M}}{\overline{QM}}\right) = \ell\left(\frac{\overline{M}}{\overline{QM}}\right).\end{aligned}$$

Kết quả chính của bài báo là định lý sau.

Định lý 3.2. Cho M là một R -môđun hữu hạn sinh có chiều $d \geq 1$. Khi đó, ta có

$$\chi_1(Q; M) \leq \text{udeg}(Q; M) - e_0(Q; M) \quad (20)$$

với mọi idêan tham số Q của M .

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh định lý bằng quy nạp theo d . Với $d=1$ thì M là Cohen-Macaulay suy rộng. Hơn nữa, ta có

$$\text{udeg}(Q; M) = e_0(Q; M) + \ell(U_M^{0,1}) = e_0(Q; M) + \ell(H_m^0(M)).$$

$$\text{Do đó } \chi_1(Q; M) = \ell\left(\frac{M}{QM}\right) - e_0(Q; M) \leq \ell(H_m^0(M)) = \text{udeg}(Q; M) - e_0(Q; M).$$

Giả sử $d \geq 2$ và giả thiết quy nạp đúng cho mọi môđun hữu hạn sinh có chiều nhỏ hơn hoặc bằng $d-1$. Chọn $a \in Q \setminus mQ$ là một phần tử bề mặt của M đối với Q . Đặt $\overline{M} = M/aM$. Khi đó ta có $\text{udeg}(Q; \overline{M}) \leq \text{udeg}(Q; M)$ bởi vì $\text{udeg}(Q; -)$ là một bậc đối đồng điều. Mặt khác,

$$\text{udeg}(Q; \overline{M}) = e_0(Q, \overline{M}) + \sum_{i=0}^{d-1} e(Q, \overline{U}_M^{i, d-1})_i = e_0(\overline{Q}, \overline{M}) + \sum_{i=0}^{d-1} e(\overline{Q}, \overline{U}_M^{i, d-1})_i = \text{udeg}(\overline{Q}; \overline{M}).$$

Do đó ta có

$$\begin{aligned}\chi_1(Q; M) &= \chi_1(\overline{Q}; \overline{M}) \leq \text{udeg}(\overline{Q}; \overline{M}) - e_0(\overline{Q}, \overline{M}) = \text{udeg}(Q; \overline{M}) - e_0(Q, \overline{M}) \\ &\leq \text{udeg}(Q; M) - e_0(Q, M).\end{aligned}$$

Định lý 3.2 và Hệ quả 2.16 cho ta một hệ quả trực tiếp sau.

Hệ quả 3.3. Cho M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng có chiều là $d \geq 1$. Khi đó, ta có

$$\chi_1(Q; M) \leq \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \ell(H_m^i(M)). \quad (21)$$

Để kết thúc tiết này chúng tôi đưa ra một ví dụ về một môđun M không là Cohen-Macaulay suy rộng và một idêan tham số Q sao cho dấu bằng trong Định lý 3.2 là đúng.

Ví dụ 3.4. Cho $R = k[[x, y, z]]$ là vành các chuỗi lũy thừa hình thức trên trường k . Cho $M = (x, y)R$ thì $\dim(M) = 3$. Khi đó, ta có $H_m^0(M) = H_m^1(M) = 0$ và $H_m^2(M) \cong H_m^1\left(\frac{R}{(x, y)}\right)$. Do đó M không là Cohen-Macaulay suy rộng. Không khó để kiểm tra,

$$\ell\left(\frac{M}{(z^{n_1}, x^{n_2}, y^{n_3})M}\right) = n_1 n_2 n_3 + n_1$$

với mọi số nguyên dương n_1, n_2, n_3 . Do đó z, x, y là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M . Theo Chú ý 2.6 ta có

$$\ell\left(\frac{M}{(z^{n_1}, x^{n_2}, y^{n_3})M}\right) = n_1 n_2 n_3 e(z, x, y; M) + n_1 e\left(z; (0 : x)_{M/yM}\right)$$

với mọi số nguyên dương n_1, n_2, n_3 . Suy ra $e(z, x, y; M) = e_0(Q, M) = 1$ và $e\left(z; (0 : x)_{M/yM}\right) = 1$. Mặt khác, ta có $U_M^{0,3} = U_M^{2,3} = 0$ và $U_M^{1,3} \simeq (0 : x)_{M/yM}$. Do đó

$$\chi_1(Q; M) = \ell\left(\frac{M}{QM}\right) - e_0(Q; M) = \text{udeg}(Q; M) - e_0(Q; M) = 1.$$

4. Kết luận

Trong bài báo này chúng tôi đưa ra chặn trên cho đặc trưng Euler-Poincaré thứ nhất của môđun đối với idêan tham số. Một câu hỏi có thể đặt ra là: Khi nào xảy ra đẳng thức trong Định lý 3.2?

Lời cảm ơn

Tác giả được tài trợ của Bộ Giáo dục & Đào tạo thông qua đề tài có mã số B2021-TNA-03.

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

- [1] L. R. Doering, T. Gunston, and W. V. Vasconcelos, "Cohomological degrees and Hilbert functions of graded modules," *American J. Math.*, vol. 120, pp. 493-504, 1998.
- [2] W. V. Vasconcelos, "Complexity Degrees of Algebraic Structures," *ArXiv:1402.1906 [math.AC]*, pp. 1-323, 2015.
- [3] W. V. Vasconcelos, "The homological degree of a module," *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 350, pp. 1167-1179, 1998.
- [4] T. C. Nguyen and H. Q. Pham, "On the structure of finitely generated modules over quotients of Cohen-Macaulay local rings," *ArXiv:1612.07638 [math.AC]*, pp. 1-27, 2015.
- [5] T. C. Doan and H. N. Pham, "On a family of cohomological degrees," *J. Korean Math. Soc.*, vol. 57, no. 3, pp. 669-689, 2020.
- [6] T. C. Nguyen, P. Schenzel, and V. T. Ngo, "Verallgemeinerte Cohen-Macaulay Moduln," *Math. Nachr.*, vol. 85, pp. 57-75, 1978.
- [7] V. T. Ngo, "Toward a theory of generalized Cohen-Macaulay modules," *Nagoya Math.*, vol. 102, pp. 1-49, 1986.
- [8] T. C. Nguyen, "p-standard systems of parameters and p-standard ideals in local rings," *Acta Math. Vietnam.*, vol. 20, no. 1, pp. 145-161, 1995.
- [9] T. C. Nguyen and T. C. Doan, "dd-Sequences and partial Euler-Poincaré characteristics of Koszul complex," *J. Algebra and Its Applications*, vol. 6, no. 2, pp. 207-231, 2007.
- [10] T. C. Doan and H. N. Pham, "Hilbert coefficients and partial Euler-Poincaré characteristics of Koszul complexes of d-sequences," *J. Algebra.*, vol. 441, pp. 125-158, 2015.
- [11] M. E. Rossi and G. Valla, *Hilbert functions of filtered modules*, Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, vol. 9, Springer, Berline, 2000.
- [12] S. Goto and K. Ozeki, "The first Euler characteristics versus the homological degrees," *Bull. Braz. Math. Soc.*, vol. 45, no. 4, pp. 679-709, 2014.