

RESEARCH THE STRESS-DEFORMED STATE OF CIRCULAR PLATE BY NON-CLASSICAL THEORY USING FINITE DIFFERENCE METHOD

Doan Quy Hieu

Vietnam-Russia Tropical Center

ARTICLE INFO	ABSTRACT
Received: 13/3/2022	This paper presents the application of the finite difference method to study the stress-deformed state of the circular plate according to the non-classical theory. The stress-deformed state calculation model for a circular plate was built based on the basis of a 3-dimensional coordinate system, which is a system of second-order differential equations with variable coefficients. To solve this problem, it is possible to use approximation methods, and numerical methods such as the finite element method, and finite difference. In this paper, the author presents the application of the finite difference method to solve the problem of the circular plate subjected to local loads. Based on the calculation results, a comparison of the results obtained by classical and non-classical theory has been made.
Revised: 12/5/2022	
Published: 19/5/2022	
KEYWORDS	
Circular plate	
Local load	
Finite difference method	
Stress-deformed state	
Non-classical theory	

NGHIÊN CỨU TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT BIẾN DẠNG TẤM TRÒN THEO LÝ THUYẾT PHI CỔ ĐIỂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN HỮU HẠN

Doãn Quý Hiếu

Trung tâm Nhiệt đới Việt Nga

THÔNG TIN BÀI BÁO	TÓM TẮT
Ngày nhận bài: 13/3/2022	Bài báo trình bày ứng dụng phương pháp sai phân hữu hạn để nghiên cứu trạng thái ứng suất biến dạng của tấm tròn theo lý thuyết phi cổ điển. Mô hình tính toán trạng thái ứng suất biến dạng đối với tấm tròn được xây dựng trên cơ sở hệ tọa độ 3 chiều, là hệ phương trình vi phân bậc 2 với các hệ số thay đổi. Để giải bài toán này, có thể sử dụng các phương pháp tính gần đúng, phương pháp số như phương pháp phần tử hữu hạn, sai phân hữu hạn. Trong bài báo này, tác giả trình bày ứng dụng phương pháp sai phân hữu hạn để giải bài toán tấm tròn chịu tải trọng cục bộ. Dựa trên kết quả tính toán đã đưa ra so sánh kết quả thu được bằng lý thuyết cổ điển và phi cổ điển.
Ngày hoàn thiện: 12/5/2022	
Ngày đăng: 19/5/2022	
TỪ KHÓA	
Tấm tròn	
Tải trọng cục bộ	
Phương pháp sai phân hữu hạn	
Trạng thái ứng suất biến dạng	
Lý thuyết phi cổ điển	

DOI: <https://doi.org/10.34238/tnu-jst.5674>

Email: dqhieu57@gmail.com

<http://jst.tnu.edu.vn>

250

Email: jst@tnu.edu.vn

1. Giới thiệu

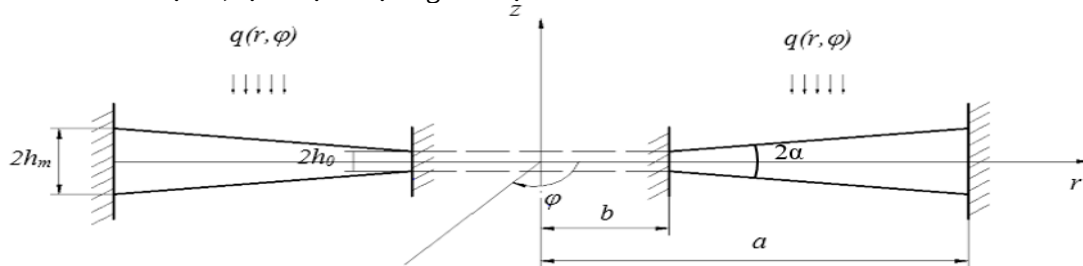
Ngày nay nhiều chi tiết kết cấu trong lĩnh vực hàng không và tên lửa - vũ trụ, trong đó tại các vị trí khớp nối, liên kết được chế tạo dưới dạng vỏ, tấm và dầm với các đặc trưng độ cứng, chiều dày thay đổi. Do đó, nhiệm vụ tăng độ tin cậy cho các phương pháp tính toán tấm bằng cách tính đến trạng thái ứng suất biến dạng (TTUSBD) trong các vùng biên của nó, tức là vị trí ngàm chặt, tải cục bộ, v.v., nơi diễn ra TTUSBD kiểu "lớp biên". Trong tài liệu [1] trình bày các phương pháp tính toán các kết cấu thành mỏng của cơ học kết cấu theo lý thuyết cổ điển. Với sự phát triển vượt bậc của công nghệ thông tin và các phần mềm mô phỏng số, tích hợp các phương pháp tính (FEM, FDM, FVM) cho kết quả đạt được là tối ưu. Bên cạnh đó cũng có nhiều phương pháp phi cổ điển được sử dụng để nghiên cứu độ bền của tấm, vỏ và các loại kết cấu theo các hướng khác nhau [2]-[4], đặc biệt tại các vị trí ngàm chặt, lực tập trung, tải trọng cục bộ.

Trạng thái ứng suất biên của tấm chữ nhật có độ dày thay đổi dưới tác dụng của tải trọng phân bố đều và tải trọng cục bộ được giới thiệu trong [5], [6]. Phương trình trạng thái của tấm được xây dựng trên cơ sở lý thuyết đàn hồi 3 chiều. Các chuyển vị theo hướng vuông góc với mặt phẳng trung bình của tấm được biểu diễn dưới dạng đa thức, cao hơn 2 bậc so với lý thuyết cổ điển của Kirchhoff-Love. Hệ phương trình cân bằng và các điều kiện biên thu được bằng cách sử dụng phương pháp biến phân Lagrange. Theo hướng nghiên cứu này, trạng thái ứng suất biến dạng của vỏ nón, vỏ cầu được trình bày trong tài liệu [7], [8]. Để giải hệ phương trình vi phân bậc cao với hệ số thay đổi có thể sử dụng phương pháp sai phân hữu hạn [9], [10].

Bài báo này trình bày các kết quả nghiên cứu trạng thái ứng suất biến dạng tấm tròn theo lý thuyết phi cổ điển bằng phương pháp sai phân hữu hạn. Phương pháp này cho phép chúng ta không chỉ giải các bài toán về tấm mỏng, mà còn cả các tấm có độ dày trung bình. Trên cơ sở đó, đưa ra so sánh các kết quả tính toán trạng thái ứng suất - biến dạng của tấm tròn theo các lý thuyết cổ điển và phi cổ điển.

2. Hệ phương trình cân bằng của tấm tròn theo lý thuyết phi cổ điển

Nghiên cứu tấm tròn có độ dày thay đổi đối xứng với mặt phẳng trung tuyến, chịu tải trọng $q(r, \varphi)$, trong hệ tọa độ trụ không thứ nguyên (r, φ, z) (Hình 1). Gọi a và b là bán kính bên ngoài và bên trong của tấm, độ dày thay đổi là $2h(r)$. Các cạnh bên ngoài và bên trong của tấm với điều kiện biên có thể tự do, tựa hoặc được ngàm chặt.



Hình 1. Tấm tròn có độ dày thay đổi

Theo tài liệu [2], sử dụng xấp xỉ sau đối với trường chuyển vị của tấm:

$$\begin{aligned} U_1(r, \varphi, z) &= u_0(r, \varphi) + u_1(r, \varphi)z + u_2(r, \varphi)\frac{z^2}{2!} + u_3(r, \varphi)\frac{z^3}{3!}, \\ U_2(r, \varphi, z) &= v_0(r, \varphi) + v_1(r, \varphi)z + v_2(r, \varphi)\frac{z^2}{2!} + v_3(r, \varphi)\frac{z^3}{3!}, \\ U_3(r, \varphi, z) &= w_0(r, \varphi) + w_1(r, \varphi)z + w_2(r, \varphi)\frac{z^2}{2!}. \end{aligned} \quad (1)$$

Phương trình hình học theo lý thuyết đàn hồi 3 chiều có dạng:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial U_1}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U_2}{\partial \varphi} + U_1 \right), \quad \varepsilon_z = \frac{\partial U_3}{\partial z}, \\ \gamma_{r\varphi} &= r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U_2}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial U_1}{\partial \varphi}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial U_3}{\partial r} + \frac{\partial U_1}{\partial z}, \quad \gamma_{\varphi z} = \frac{1}{r} \frac{\partial U_3}{\partial \varphi} + \frac{\partial U_2}{\partial z}.\end{aligned}\quad (2)$$

Ứng suất của tấm được tính theo các biểu thức:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= (2G_0 + \lambda)\varepsilon_r + \lambda\varepsilon_\varphi + \lambda\varepsilon_z, \quad \sigma_\varphi = \lambda\varepsilon_r + (2G_0 + \lambda)\varepsilon_\varphi + \lambda\varepsilon_z, \\ \sigma_z &= \lambda\varepsilon_r + \lambda\varepsilon_\varphi + (2G_0 + \lambda)\varepsilon_z, \quad \tau_{r\varphi} = G_0\gamma_{r\varphi}, \quad \tau_{rz} = G_0\gamma_{rz}, \quad \tau_{\varphi z} = G_0\gamma_{\varphi z},\end{aligned}\quad (3)$$

Trong đó, các hệ số G_0, λ là các hằng số đàn hồi vật liệu của tấm.

Thay các biểu thức (1), (2), (3) vào phương trình vi phân cân bằng của tấm theo phương pháp biến phân Lagrange [6], thu được hệ phương trình cân bằng của tấm tròn theo lý thuyết phi cổ điển:

$$\begin{aligned}& (K_1^{u00} + K_1^{u01} \frac{\partial}{\partial r} + K_1^{u011} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_1^{u022} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2})u_0 + K_1^{v02} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}v_0 + K_1^{v012} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}v_0 + \\& + (K_1^{u20} + K_1^{u21} \frac{\partial}{\partial r} + K_1^{u211} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_1^{u222} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2})u_2 + K_1^{v22} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}v_2 + K_1^{v212} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}v_2 + \\& + K_1^{w10}w_1 + K_1^{w11} \frac{\partial}{\partial r}w_1 + K_1^{q13p0} \cdot q_{13p} + K_1^{q13m0} \cdot q_{13m} = 0, \\& (K_2^{u10} + K_2^{u11} \frac{\partial}{\partial r} + K_2^{u111} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_2^{u122} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2})u_1 + K_2^{v12} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}v_1 + K_2^{v112} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}v_1 + \\& + (K_2^{u30} + K_2^{u31} \frac{\partial}{\partial r} + K_2^{u311} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_2^{u322} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2})u_3 + K_2^{v32} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}v_3 + K_2^{v312} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}v_3 + \\& + K_2^{w20}w_2 + K_2^{w21} \frac{\partial}{\partial r}w_2 + K_2^{w01} \frac{\partial}{\partial r}w_0 = 0, \\& (K_3^{u00} + K_3^{u01} \frac{\partial}{\partial r} + K_3^{u011} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_3^{u022} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2})u_0 + K_3^{v02} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}v_0 + K_3^{v012} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}v_0 + \\& + (K_3^{u20} + K_3^{u21} \frac{\partial}{\partial r} + K_3^{u211} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_3^{u222} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2})u_2 + K_3^{v22} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}v_2 + K_3^{v212} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}v_2 + \\& + K_3^{w20}w_1 + K_3^{w21} \frac{\partial}{\partial r}w_1 = 0, \\& (K_4^{u10} + K_4^{u11} \frac{\partial}{\partial r} + K_4^{u111} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_4^{u122} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2})u_1 + K_4^{v12} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}v_1 + K_4^{v112} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}v_1 + \\& + (K_4^{u30} + K_4^{u31} \frac{\partial}{\partial r} + K_4^{u311} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_4^{u322} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2})u_3 + K_4^{v32} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}v_3 + K_4^{v312} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}v_3 + \\& + K_4^{w20}w_2 + K_4^{w21} \frac{\partial}{\partial r}w_2 + K_4^{w01} \frac{\partial}{\partial r}w_0 = 0, \\& (K_5^{u02} \frac{\partial}{\partial \varphi} + K_5^{u012} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi})u_0 + K_5^{v011} \frac{\partial^2}{\partial r^2}v_0 + K_5^{v022} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}v_0 + \\& + (K_5^{u22} \frac{\partial}{\partial \varphi} + K_5^{u212} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi})u_2 + K_5^{v211} \frac{\partial^2}{\partial r^2}v_2 + K_5^{v222} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}v_2 + K_5^{w12} \frac{\partial}{\partial \varphi}w_1 = 0,\end{aligned}\quad (4)$$

$$\begin{aligned}
& (K_6^{u12} \frac{\partial}{\partial \varphi} + K_6^{u112} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}) u_1 + K_6^{v10} v_1 + K_6^{v111} \frac{\partial^2}{\partial r^2} v_1 + K_6^{v122} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v_1 + K_6^{w02} \frac{\partial}{\partial \varphi} w_0 + \\
& + (K_6^{u32} \frac{\partial}{\partial \varphi} + K_6^{u312} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}) u_3 + K_6^{v30} v_3 + K_6^{v311} \frac{\partial^2}{\partial r^2} v_3 + K_6^{v322} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v_3 + K_6^{w22} \frac{\partial}{\partial \varphi} w_2 = 0, \\
& (K_7^{u02} \frac{\partial}{\partial \varphi} + K_7^{u012} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}) u_0 + K_7^{v011} \frac{\partial^2}{\partial r^2} v_0 + K_7^{v022} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v_0 + \\
& + (K_7^{u22} \frac{\partial}{\partial \varphi} + K_5^{u212} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}) u_2 + K_7^{v20} v_2 + K_7^{v211} \frac{\partial^2}{\partial r^2} v_2 + K_7^{v222} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v_2 + K_7^{w12} \frac{\partial}{\partial \varphi} w_1 = 0, \\
& (K_8^{u12} \frac{\partial}{\partial \varphi} + K_8^{u112} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}) u_1 + K_8^{v10} v_1 + K_8^{v111} \frac{\partial^2}{\partial r^2} v_1 + K_8^{v122} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v_1 + K_8^{w02} \frac{\partial}{\partial \varphi} w_0 \\
& + (K_8^{u32} \frac{\partial}{\partial \varphi} + K_8^{u312} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}) u_3 + K_8^{v30} v_3 + K_8^{v311} \frac{\partial^2}{\partial r^2} v_3 + K_8^{v322} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v_3 + K_8^{w22} \frac{\partial}{\partial \varphi} w_2 = 0, \\
& (K_9^{w011} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_9^{w022} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}) w_0 + (K_9^{w211} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_9^{w222} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}) w_2 + \\
& + K_9^{u11} \frac{\partial}{\partial r} u_1 + K_9^{v12} \frac{\partial}{\partial \varphi} v_1 + K_9^{u31} \frac{\partial}{\partial r} u_3 + K_9^{v32} \frac{\partial}{\partial \varphi} v_3 + K_9^{q33p0} \cdot q_{33p} + K_9^{q33m0} \cdot q_{33m} = 0, \\
& (K_{10}^{w10} + K_{10}^{w111} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_{10}^{w122} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}) w_1 + (K_{10}^{w211} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_{10}^{w222} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}) w_2 + K_{10}^{u00} u_0 + K_{10}^{q33p0} \cdot q_{33p} \\
& + K_{10}^{u01} \frac{\partial}{\partial r} u_0 + K_{10}^{v02} \frac{\partial}{\partial \varphi} v_0 + K_{10}^{u20} u_2 + K_{10}^{u21} \frac{\partial}{\partial r} u_2 + K_{10}^{v22} \frac{\partial}{\partial \varphi} v_2 + K_{10}^{q33m0} \cdot q_{33m} = 0, \\
& (K_{11}^{w011} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_{11}^{w022} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}) w_0 + (K_{11}^{w20} + K_{11}^{w211} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_{11}^{w222} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}) w_2 + K_{11}^{u10} u_1 + K_{11}^{q33p0} \cdot q_{33p} \\
& + K_{11}^{u11} \frac{\partial}{\partial r} u_1 + K_{11}^{v12} \frac{\partial}{\partial \varphi} v_1 + K_{11}^{u30} u_3 + K_{11}^{u31} \frac{\partial}{\partial r} u_3 + K_{11}^{v32} \frac{\partial}{\partial \varphi} v_3 + K_{11}^{q33m0} \cdot q_{33m} = 0.
\end{aligned}$$

Ở đây các hệ số K với ký hiệu trên và dưới là các tham số thay đổi, phụ thuộc vào độ dày tấm và các hằng số đàn hồi vật liệu của tấm. Đây là hệ phương trình vi phân bậc 2, không thuần nhất với các hệ số thay đổi. Do đó có thể sử dụng phương pháp biến đổi lượng giác để chuyển về hệ phương trình vi phân thuần nhất.

3. Hệ phương trình vi phân thuần nhất cho bài toán biên

Khảo sát tấm tròn đẳng hướng, độ dày $h(r)$, trong đó $-h \leq z \leq h$, tọa độ $z = 0$ tương ứng với mặt phẳng trung bình của tấm. Giả sử tấm tròn trên hình 1 có biên ngàm chặt tại các cạnh $r = a, r = b$, khi đó tải trọng và chuyển vị của tấm được biểu diễn dưới dạng chuỗi lượng giác.

$$\begin{aligned}
q(r, \varphi) &= \sum_{m=1}^{\infty} Q_m(r) \sin(m\varphi), \quad u_i(r, \varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} U_{im}(r) \sin(m\varphi), \\
v_i(r, \varphi) &= \sum_{m=1}^{\infty} V_{im}(r) \cos(m\varphi), \quad w_j(r, \varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} W_{jm}(r) \sin(m\varphi), \quad i = \overline{0, 3}, \quad j = \overline{0, 2}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Thay (5) vào hệ phương trình cân bằng (4), thu được hệ phương trình vi phân thuần nhất đối với các hàm chuyển vị U_{im}, V_{im}, W_{jm} , $i = \overline{0, 3}, j = \overline{0, 2}, m = 1, 2, 3, \dots$ có dạng như sau:

$$\begin{aligned}
& \left(K_1^{u00} + K_1^{u01} \frac{d}{dr} + K_1^{u011} \frac{d^2}{dr^2} - K_1^{u022} \cdot m^2 \right) U_{0m}(r) + \left(K_1^{u20} + K_1^{u21} \frac{d}{dr} + K_1^{u211} \frac{d^2}{dr^2} - K_1^{u222} \cdot m^2 \right) U_{2m}(r) - \\
& -m(K_1^{v02} + K_1^{v012} \frac{d}{dr}) V_{0m}(r) - m(K_1^{v22} + K_1^{v212} \frac{d}{dr}) V_{2m}(r) + (K_1^{w10} + K_1^{w11} \frac{d}{dr}) W_{1m}(r) = 0, \\
& \left(K_2^{u10} + K_2^{u11} \frac{d}{dr} + K_2^{u111} \frac{d^2}{dr^2} - K_2^{u122} \cdot m^2 \right) U_{1m}(r) + \left(K_2^{u30} + K_2^{u31} \frac{d}{dr} + K_2^{u311} \frac{d^2}{dr^2} - K_2^{u322} \cdot m^2 \right) U_{3m}(r) - \\
& -m(K_2^{v12} + K_2^{v112} \frac{d}{dr}) V_{1m}(r) - m(K_2^{v32} + K_2^{v312} \frac{d}{dr}) V_{3m}(r) + (K_2^{w20} + K_2^{w21} \frac{d}{dr}) W_{2m}(r) + K_2^{w01} \frac{d}{dr} W_{0m}(r) = 0, \\
& \left(K_3^{u00} + K_3^{u01} \frac{d}{dr} + K_3^{u011} \frac{d^2}{dr^2} - K_3^{u022} \cdot m^2 \right) U_{0m}(r) + \left(K_3^{u20} + K_3^{u21} \frac{d}{dr} + K_3^{u211} \frac{d^2}{dr^2} - K_3^{u222} \cdot m^2 \right) U_{2m}(r) - \\
& -m(K_3^{v02} + K_3^{v012} \frac{d}{dr}) V_{0m}(r) - m(K_3^{v22} + K_3^{v212} \frac{d}{dr}) V_{2m}(r) + (K_3^{w10} + K_3^{w11} \frac{d}{dr}) W_{1m}(r) = 0, \\
& \left(K_4^{u10} + K_4^{u11} \frac{d}{dr} + K_4^{u111} \frac{d^2}{dr^2} - K_4^{u122} \cdot m^2 \right) U_{1m}(r) + \left(K_4^{u30} + K_4^{u31} \frac{d}{dr} + K_4^{u311} \frac{d^2}{dr^2} - K_4^{u322} \cdot m^2 \right) U_{3m}(r) - \\
& -m(K_4^{v12} + K_4^{v112} \frac{d}{dr}) V_{1m}(r) - m(K_4^{v32} + K_4^{v312} \frac{d}{dr}) V_{3m}(r) + S2 \cdot (K_4^{w20} + K_4^{w21} \frac{d}{dr}) W_{2m}(r) + K_4^{w01} \frac{d}{dr} W_{0m}(r) = 0, \\
& m \left(K_5^{u02} + K_5^{u012} \frac{d}{dr} \right) U_{0m}(r) + m \left(K_5^{u22} + K_5^{u212} \frac{d}{dr} \right) U_{2m}(r) + \\
& + (K_5^{v011} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_5^{v022}) V_{0m}(r) + (K_5^{v211} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_5^{v222}) V_{2m}(r) + m \cdot K_5^{w12} W_{1m}(r) = 0, \\
& m \left(K_6^{u12} + K_6^{u112} \frac{d}{dr} \right) U_{1m}(r) + m \left(K_6^{u32} + K_6^{u312} \frac{d}{dr} \right) U_{3m}(r) + (K_6^{v111} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_6^{v122} + K_6^{v10}) V_{1m}(r) + \\
& + (K_6^{v311} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_6^{v322} + K_6^{v30}) V_{3m}(r) + m \cdot K_6^{w02} W_{0m}(r) + m \cdot K_6^{w22} W_{2m}(r) = 0, \\
& m \left(K_7^{u02} + K_7^{u012} \frac{d}{dr} \right) U_{0m}(r) + m \left(K_7^{u22} + K_7^{u212} \frac{d}{dr} \right) U_{2m}(r) + \\
& + (K_7^{v011} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_7^{v022}) V_{0m}(r) + (K_7^{v211} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_7^{v222} + K_7^{v20}) V_{2m}(r) + m \cdot K_7^{w12} W_{1m}(r) = 0, \\
& m \left(K_8^{u12} + K_8^{u112} \frac{d}{dr} \right) U_{1m}(r) + m \left(K_8^{u32} + K_8^{u312} \frac{d}{dr} \right) U_{3m}(r) + m \cdot K_8^{w02} W_{0m}(r) \\
& + (K_8^{v111} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_8^{v122} + K_8^{v10}) V_{1m}(r) + (K_8^{v311} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_8^{v322} + K_8^{v30}) V_{3m}(r) + m \cdot K_8^{w22} W_{2m}(r) = 0, \\
& K_9^{u11} \frac{d}{dr} U_{1m}(r) + K_9^{u31} \frac{d}{dr} U_{3m}(r) - m \cdot K_9^{v12} V_{1m}(r) - m \cdot K_9^{v32} V_{3m}(r) + \\
& + (K_9^{w011} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_9^{w022}) W_{0m}(r) + (K_9^{w211} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_9^{w222}) W_{2m}(r) + K_9^{Q330} Q33_m(r) = 0, \\
& (K_{10}^{u01} \frac{d}{dr} + K_{10}^{u00}) U_{0m}(r) + (K_{10}^{u21} \frac{d}{dr} + K_{10}^{u20}) U_{2m}(r) - m \cdot K_{10}^{v02} V_{0m}(r) - \\
& - m \cdot K_{10}^{v22} V_{2m}(r) + (K_{10}^{w111} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_{10}^{w122} + K_{10}^{w10}) W_{1m}(r) = 0, \\
& (K_{11}^{u11} \frac{d}{dr} + K_{11}^{u10}) U_{1m}(r) + (K_{11}^{u31} \frac{d}{dr} + K_{11}^{u30}) U_{3m}(r) - m \cdot K_{11}^{v12} V_{1m}(r) - m \cdot K_{11}^{v32} V_{3m}(r) + \\
& + (K_{11}^{w011} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_{11}^{w022}) W_{0m}(r) + (K_{11}^{w211} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_{11}^{w222} + K_{11}^{w20}) W_{2m}(r) + K_{11}^{Q330} Q33_m(r) = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Để giải hệ phương trình (6), ta sử dụng phương pháp sai phân hữu hạn để chuyển về hệ phương trình đại số. Các xấp xỉ bậc 1 và bậc 2 được tính gần đúng bằng công thức:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2s} + O(s^2); \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{s^2} + O(s^2)$$

Sau khi biến đổi thu được hệ phương trình đại số sau:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{K_1^{u011}}{s^2} - \frac{K_1^{u01}}{2s}\right)u_0^{i-1} + \frac{K_1^{v012}}{2s}v_0^{i-1} - \frac{K_1^{w11}}{2s}w_1^{i-1} - \frac{K_1^{w21}}{2s}w_2^{i-1} + \left(\frac{K_1^{u211}}{s^2} - \frac{K_1^{u21}}{2s}\right)u_2^{i-1} + \frac{K_1^{v212}}{2s}v_2^{i-1} + \\ & + (K_1^{u00} - \frac{2K_1^{u011}}{s^2} - K_1^{u022})u_0^i - K_1^{v02}v_0^i + K_1^{w10}w_1^i + (K_1^{u20} - \frac{2K_1^{u211}}{s^2} - K_1^{u222})u_2^i + \left(\frac{K_1^{u011}}{s^2} + \frac{K_1^{u01}}{2s}\right)u_0^{i+1} - \\ & - \frac{K_1^{v012}}{2s}v_0^{i+1} + \frac{K_1^{w11}}{2s}w_1^{i+1} + \left(\frac{K_1^{u211}}{s^2} + \frac{K_1^{u21}}{2s}\right)u_2^{i+1} - \frac{K_1^{v212}}{2s}v_2^{i+1} = 0, \\ & - \frac{K_2^{w01}}{2s}w_0^{i-1} + \left(\frac{K_2^{u111}}{s^2} - \frac{K_2^{u11}}{2s}\right)u_1^{i-1} + \frac{K_2^{v112}}{2s}v_1^{i-1} - \frac{K_2^{w21}}{2s}w_2^{i-1} - \frac{K_2^{v112}}{2s}v_1^{i+1} + \frac{K_2^{w21}}{2s}w_2^{i+1} + \\ & + \left(\frac{K_2^{u311}}{s^2} - \frac{K_2^{u31}}{2s}\right)u_3^{i-1} + (K_2^{u10} - \frac{2K_2^{u111}}{s^2} - K_2^{u122})u_1^i - K_2^{v12}v_1^i + K_2^{w20}w_2^i + (K_2^{u30} - \frac{2K_2^{u311}}{s^2} - K_2^{u322})u_3^i + \\ & + K_2^{v32}v_3^i + \frac{K_2^{w01}}{2s}w_0^{i+1} + \left(\frac{K_2^{u111}}{s^2} + \frac{K_2^{u11}}{2s}\right)u_1^{i+1} + \left(\frac{K_2^{u311}}{s^2} + \frac{K_2^{u31}}{2s}\right)u_3^{i+1} - \frac{K_2^{v312}}{2s}v_3^{i+1} = 0, \\ & \left(\frac{K_3^{u011}}{s^2} - \frac{K_3^{u01}}{2s}\right)u_0^{i-1} + \frac{K_3^{v012}}{2s}v_0^{i-1} - \frac{K_3^{w11}}{2s}w_1^{i-1} + \left(\frac{K_3^{u211}}{s^2} - \frac{K_3^{u21}}{2s}\right)u_2^{i-1} + \frac{K_3^{w11}}{2s}w_1^{i+1} + \left(\frac{K_3^{u211}}{s^2} + \frac{K_3^{u21}}{2s}\right)u_2^{i+1} \\ & + \frac{K_3^{v212}}{2s}v_2^{i-1} - \frac{K_3^{w21}}{2s}w_2^{i-1} + (K_3^{u00} - \frac{2K_3^{u011}}{s^2} - K_3^{u022})u_0^i - K_3^{v02}v_0^i + K_3^{w10}w_1^i + \\ & + (K_3^{u20} - \frac{2K_3^{u211}}{s^2} - K_3^{u222})u_2^i - K_3^{v22}v_2^i + \left(\frac{K_3^{u011}}{s^2} + \frac{K_3^{u01}}{2s}\right)u_0^{i+1} - \frac{K_3^{v012}}{2s}v_0^{i+1} - \frac{K_3^{v212}}{2s}v_2^{i+1} = 0, \\ & - \frac{K_4^{w01}}{2s}w_0^{i-1} + \left(\frac{K_4^{u111}}{s^2} - \frac{K_4^{u11}}{2s}\right)u_1^{i-1} + \frac{K_4^{v112}}{2s}v_1^{i-1} - \frac{K_4^{w21}}{2s}w_2^{i-1} - \frac{K_4^{v112}}{2s}v_1^{i+1} + \frac{K_4^{w21}}{2s}w_2^{i+1} + \\ & + \left(\frac{K_4^{u311}}{s^2} - \frac{K_4^{u31}}{2s}\right)u_3^{i-1} + \frac{K_4^{v312}}{2s}v_3^{i-1} + (K_4^{u10} - \frac{2K_4^{u111}}{s^2} - K_4^{u122})u_1^i - K_4^{v12}v_1^i + K_4^{w20}w_2^i - \frac{K_4^{v312}}{2s}v_3^{i+1} + \\ & + (K_4^{u30} - \frac{2K_4^{u311}}{s^2} - K_4^{u322})u_3^i + K_4^{v32}v_3^i + \frac{K_4^{w01}}{2s}w_0^{i+1} + \left(\frac{K_4^{u111}}{s^2} + \frac{K_4^{u11}}{2s}\right)u_1^{i+1} + \left(\frac{K_4^{u311}}{s^2} + \frac{K_4^{u31}}{2s}\right)u_3^{i+1} = 0, \\ & - \frac{K_5^{u012}}{2s}u_0^{i-1} + \frac{K_5^{v011}}{s^2}v_0^{i-1} - \frac{K_5^{u212}}{2s}u_2^{i-1} + \frac{K_5^{v211}}{s^2}v_2^{i-1} + \frac{K_5^{u012}}{2s}u_0^{i+1} + \frac{K_5^{v011}}{s^2}v_0^{i+1} + K_5^{u02}u_0^i - \\ & - \left(\frac{2K_5^{u011}}{s^2} + K_5^{v022}\right)v_0^i + K_5^{w12}w_1^i + K_5^{u22}u_2^i - \left(\frac{2K_5^{v211}}{s^2} + K_5^{v222}\right)v_2^i + \frac{K_5^{u212}}{2s}u_2^{i+1} + \frac{K_5^{v211}}{s^2}v_2^{i+1} = 0, \\ & - \frac{K_6^{u112}}{2s}u_1^{i-1} + \frac{K_6^{v111}}{s^2}v_1^{i-1} - \frac{K_6^{u312}}{2s}u_3^{i-1} + \frac{K_6^{v311}}{s^2}v_3^{i-1} + K_6^{w02}w_0^i + K_6^{u12}u_1^i - \left(\frac{2K_6^{v111}}{s^2} + K_6^{v122} - K_6^{v10}\right)v_1^i + \\ & + K_6^{w22}w_2^i + K_6^{u32}u_3^i - \left(\frac{2K_6^{v311}}{s^2} + K_6^{v322} - K_6^{v30}\right)v_3^i + \frac{K_6^{u112}}{2s}u_1^{i+1} + \frac{K_6^{v111}}{s^2}v_1^{i+1} + \frac{K_6^{u312}}{2s}u_3^{i+1} + \frac{K_6^{v311}}{s^2}v_3^{i+1} = 0, \\ & - \frac{K_7^{u012}}{2s}u_0^{i-1} + \frac{K_7^{v011}}{s^2}v_0^{i-1} - \frac{K_7^{u212}}{2s}u_2^{i-1} + \frac{K_7^{v211}}{s^2}v_2^{i-1} + \frac{K_7^{u012}}{2s}u_0^{i+1} + \frac{K_7^{v011}}{s^2}v_0^{i+1} + K_7^{u02}u_0^i - \\ & - \left(\frac{2K_7^{v011}}{s^2} + K_7^{v022}\right)v_0^i + K_7^{w12}w_1^i + K_7^{u22}u_2^i - \left(\frac{2K_7^{v211}}{s^2} + K_7^{v222} - K_7^{v20}\right)v_2^i + \frac{K_7^{u212}}{2s}u_2^{i+1} + \frac{K_7^{v211}}{s^2}v_2^{i+1} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{K_8^{u112}}{2s}u_1^{i-1} + \frac{K_8^{v111}}{s^2}v_1^{i-1} - \frac{K_8^{u312}}{2s}u_3^{i-1} + \frac{K_8^{v311}}{s^2}v_3^{i-1} - \left(\frac{2K_8^{v311}}{s^2} + K_8^{v322} - K_8^{v30}\right)v_3^i + \frac{K_8^{u112}}{2s}u_1^{i+1} + K_8^{w02}w_0^i + \\
& + K_8^{u12}u_1^i - \left(\frac{2K_8^{v111}}{s^2} + K_8^{v122} - K_8^{v10}\right)v_1^i + K_8^{w22}w_2^i + K_8^{u32}u_3^i + \frac{K_8^{v111}}{s^2}v_1^{i+1} + \frac{K_8^{u312}}{2s}u_3^{i+1} + \frac{K_8^{v311}}{s^2}v_3^{i+1} = 0, \\
& \frac{K_9^{w011}}{s^2}w_0^{i-1} - \frac{K_9^{u11}}{2s}u_1^{i-1} + \frac{K_9^{w211}}{s^2}w_2^{i-1} - \frac{K_9^{u31}}{2s}u_3^{i-1} + \frac{K_9^{w011}}{s^2}w_0^{i+1} + \frac{K_9^{u11}}{2s}u_1^{i+1} - \left(\frac{2K_9^{w011}}{s^2} + K_9^{w022}\right)w_0^i - \\
& - K_9^{v12}v_1^i - \left(\frac{2K_9^{w211}}{s^2} + K_9^{w222}\right)w_2^i - K_9^{v32}v_3^i + \frac{K_9^{w211}}{s^2}w_2^{i+1} + \frac{K_9^{u31}}{2s}u_3^{i+1} + K_9^{q33}Q_m = 0, \\
& -\frac{K_{10}^{u01}}{2s}u_0^{i-1} + \frac{K_{10}^{w111}}{s^2}w_1^{i-1} - \frac{K_{10}^{u21}}{2s}u_2^{i-1} + \frac{K_{10}^{u00}}{2s}u_0^i - K_{10}^{v02}v_0^i - \left(\frac{2K_{10}^{w111}}{s^2} + K_{10}^{w122} - K_{10}^{w10}\right)w_1^i + \\
& + K_{10}^{u20}u_2^i - K_{10}^{v22}v_2^i + \frac{K_{10}^{u01}}{2s}u_0^{i+1} + \frac{K_{10}^{w111}}{s^2}w_1^{i+1} + \frac{K_{10}^{u21}}{2s}u_2^{i+1} + K_{10}^{q33}Q_m = 0, \\
& \frac{K_{11}^{w011}}{s^2}w_0^{i-1} - \frac{K_{11}^{u11}}{2s}u_1^{i-1} + \frac{K_{11}^{w211}}{s^2}w_2^{i-1} - \frac{K_{11}^{u31}}{2s}u_3^{i-1} - K_{11}^{v32}v_3^i + \frac{K_{11}^{w011}}{s^2}w_0^{i+1} + \frac{K_{11}^{u11}}{2s}u_1^{i+1} - \left(\frac{2K_{11}^{w011}}{s^2} + K_{11}^{w022}\right)w_0^i + \\
& + K_{11}^{u10}u_1^i - K_{11}^{v12}v_1^i - \left(\frac{2K_{11}^{w211}}{s^2} + K_{11}^{w222} - K_{11}^{w20}\right)w_2^i + K_{11}^{u30}u_3^i - \frac{K_{11}^{w211}}{s^2}w_2^{i+1} + \frac{K_{11}^{u31}}{2s}u_3^{i+1} + K_{11}^{q33}Q_m = 0,
\end{aligned}$$

Trong đó, $i = \overline{1, (N_0 - 1)}$, và s – tương ứng là số nút chia và bước chia theo sơ đồ sai phân. Tại các vị trí gần biên, vị trí tải trọng cục bộ, có thể tăng số lượng các điểm chia, giúp cho độ chính xác đạt được cao hơn. Chương trình tính toán được lập trình bằng phần mềm Maple.

4. Tính toán trạng thái ứng suất của tấm tròn dưới ảnh hưởng tải trọng cục bộ

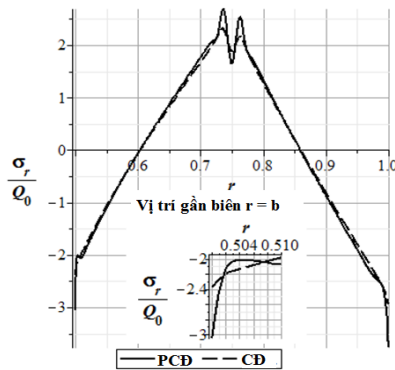
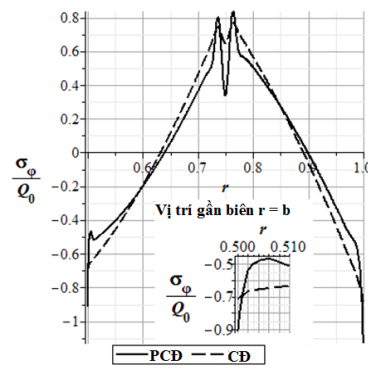
Khảo sát tấm tròn có độ dày thay đổi, chịu ảnh hưởng của tải trọng cục bộ:

$$q(r, \varphi) = \begin{cases} 0, & b \leq r < r_1 \\ Q_0 \sin\left(\frac{3\pi(r-r_1)}{r_2-r_1}\right) \sin(\varphi), & r_1 \leq r \leq r_2, \quad r_1 = (5a+7b)/12, \quad r_2 = (5b+7a)/12. \\ 0, & r_2 < r \leq a \end{cases} \quad (8)$$

Các cạnh $r=a$, $r=b$ của tấm được ngàm chặt. Kích thước chiều dài, chiều rộng của tấm là: $a=1(m)$, $b=0,5(m)$, $h_m=0,025(m)$, $h_0=0,01(m)$, độ dày tấm xác định theo công thức: $h(r)=h_m - tg(\alpha) \cdot (a-r)$, $tg(\alpha)=(h_m-h_0)/a$, 2α – góc nghiêng của tấm (Hình 1). Hệ số Poisson $\mu=0,3$, môđun đàn hồi $E=2 \cdot 10^{11}$ Pa.

Kết quả tính ứng suất của tấm tròn theo lý thuyết phi cô điển được thể hiện trên đồ thị Hình 2 và Hình 3. Trên các hình này, ký hiệu “PCĐ” tương ứng với lý thuyết phi cô điển và “CĐ” tương ứng với lý thuyết cô điển. Phân tích các kết quả thu được, ta thấy ngoài vùng biên, các giá trị ứng suất thu được theo lý thuyết cô điển và phi cô điển hầu như trùng với nhau. Điều này khẳng định được độ chính xác của phương pháp phi cô điển.

Sai khác giữa các kết quả tại vùng biên lớn nhất là trên Hình 3, tại vị trí tải trọng cục bộ, ứng suất σ_φ theo hai lý thuyết chênh lệch nhau 40% tại vị trí $r=0,75 m$. Khi xác định trạng thái ứng suất của tấm tròn theo phương pháp phi cô điển, ứng suất tại lớp biên gần vị trí ngàm chặt có sự thay đổi: ứng suất σ_r tăng thêm khoảng 25%, σ_φ tăng thêm khoảng 28,5% tại vị trí biên $r=b$ (Hình 2 và Hình 3). Như vậy, tại các vị trí ngàm chặt, vị trí tải trọng cục bộ, phương pháp PCĐ cho kết quả tính toán ứng suất của tấm cao hơn đáng kể so với phương pháp CĐ.

Hình 2. Đồ thị σ_r theo bán kínhHình 3. Đồ thị σ_ϕ theo bán kính

5. Kết luận

Trên cơ sở tính toán lý thuyết và ví dụ cụ thể trình bày trên có thể rút ra những kết luận sau:

1. Sử dụng phương pháp biến phân Lagrange và phân tích các thành phần chuyển vị của tấm dưới dạng đa thức, cao hơn 2 bậc so với lý thuyết cổ điển, đã xây dựng được bài toán biên xác định TTUSBĐ của tấm tròn có độ dày thay đổi.

2. Bằng phương pháp biến đổi lượng giác, đã chuyển hệ phương trình cân bằng của tấm về dạng thuần nhất. Sau đó sử dụng phương pháp sai phân hữu hạn để chuyển về dạng hệ phương trình đại số để giải bằng phần mềm MAPLE.

3. Đưa ra so sánh kết quả tính toán TTUSBĐ của tấm tròn theo lý thuyết cổ điển và phi cổ điển. Khi thiết kế, tính toán độ bền, ứng suất biến dạng của các chi tiết dạng tấm vỏ có các điều kiện biên như ngàm chặt, lực tập trung, tải trọng cục bộ, nên ưu tiên sử dụng phương pháp PCD vì tại các vị trí đó kết quả tính toán ứng suất cao hơn đáng kể so với phương pháp CD. Phương pháp PCD cho phép chúng ta không chỉ giải các bài toán về tấm mỏng, mà còn cả các tấm có độ dày trung bình.

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

- [1] S. P. Timoshenko and S. Voinovsky-Krieger, *Plates and shells*, (in Russian), Moscow, 1966, p. 636.
- [2] V. V. Vasiliev and S. A. Lurie, "On the problem of constructing a non-classical theory of plates," (in Russian), *Izv. AN. MTT*, no. 2, pp. 158-167, 1990.
- [3] V. V. Firsanov, "Study of stress-Deformed State of Rectangular Plates Based on Nonclassical Theory," *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, vol. 45, no. 6, pp. 515-522, 2016.
- [4] V. V. Firsanov, "The stressed state of the "boundary layer" type cylindrical shells investigated according to a nonclassical theory," *Journal of machinery, manufacture and reliability*, vol. 47, no. 3, pp. 241-248, 2018.
- [5] Q. H. Doan and V. V. Firsanov, "Edge stress state of a rectangular plate with variable thickness based on a refined theory," (in Russian), *MAI Proceedings*, Moscow, no. 110, 2020, doi: 10.34759/trd-2020-110-10.
- [6] Q. H. Doan, "Study on the stress-deformed state of rectangular plate with variable thickness according to the non-classical theory" *TNU Journal of Science and Technology*, vol. 226, no. 11, pp. 124-130, 2021, doi: 10.34238/tnu-jst.4521.
- [7] V. V. Firsanov and V. T. Pham, "Research of the stress-strain state of conical shell under the action of local load based on the non-classical theory," *Journal of Mechanical Engineering Research and Developments*, vol. 43, no. 4, pp. 24-32, 2020.
- [8] V. V. Firsanov and V. T. Pham, "Stress-strain state of the spherical shell exposed to an arbitrary load based on a non-classical theory," (in Russian), *Problems of Strength and Plasticity*, vol. 81, no. 3, pp. 359-368, 2019.
- [9] Md. Roknuzzaman, B. Hossain, R. Haque, and T. U. Ahmed, "Analysis of Rectangular Plate with Opening by Finite Difference Method," *American Journal of Civil Engineering and Architecture*, vol. 3, pp. 165-173, 2015, doi: 10.12691/ajcea-3-5-3.
- [10] P. Katarina, H. Marko, and B. Zlatko, "Finite difference solution of plate bending using Wolfram Mathematica," *Tehnički glasnik*, vol. 13, pp. 241-247, 2019, doi: 10.31803/tg-20190328111708.