MACHINE LEARNING PROBLEM TO STUDY THE CONVERGENCE OF A SERIES BASING ON SUB-SERIES OF THE HAMONIC SERIES

Dinh Van Tiep[1*], Hoang Van Ta[2]
[1]*TNU - University of Technology,*
[2]*College of Technology and Trade*

ARTICLE INFO

Received: 13/8/2022
Revised: 07/10/2022
Published: 07/10/2022

KEYWORDS

Machine learning
Harmonic series
Sub-series of harmonic series
Convergence of a series
Distribution of terms of a series

ABSTRACT

In this article, we construct a machine learning approach to implement the procedure of evaluating the convergency of a series in refering to a sub-series of the hamonic series. This approach based on the theory of machine learning creates an automation procedure for the related problem. The results obtained in this article with the clear proofs are helpful. They are developed from the main results about the criteria of convergence for a subseries of the hamonic series which was first proposed by V.T. Dinh et al. This development is directed in the way that the application for such critera become more practical and easier to implement. Therefore, the implementation constructed in the article with the reference to these results is feasible and more efficient. The application could be extended to study the behavior of the approximate solution to ordinary differential equations or partial differential equations with the machine learning approach, as well as the combination of some inovation numerical approaches, such as the Monte-Carlos method.

BÀI TOÁN HỌC MÁY CHO KHẢO SÁT SỰ HỘI TỤ CỦA CHUỖI SỐ DỰA TRÊN LỚP CHUỖI CON CỦA CHUỖI ĐIỀU HÒA

Đinh Văn Tiệp[1*], Hoàng Văn Tá[2]
[1]*Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp - ĐH Thái Nguyên*
[2]*Trường Cao đẳng Công nghệ và Thương mại*

THÔNG TIN BÀI BÁO

Ngày nhận bài: 13/8/2022
Ngày hoàn thiện: 07/10/2022
Ngày đăng: 07/10/2022

TỪ KHÓA

Học máy
Chuỗi điều hòa
Chuỗi con của chuỗi điều hòa
Hội tụ chuỗi số
Phân bố các số hạng chuỗi số

TÓM TẮT

Bài báo này đưa ra bài toán khảo sát sự hội tụ của chuỗi số dựa trên các kết quả gần đây về tiêu chuẩn hội tụ của một chuỗi con của chuỗi điều hòa trên quan điểm của lĩnh vực học máy. Trong đó, sự so sánh tính tương đồng về mặt hội tụ hay phân kỳ của một chuỗi số dương với một chuỗi con của chuỗi điều hòa được đưa ra làm cơ sở cho nguyên lý đưa ra kết luận của thuật toán. Hướng tiếp cận của lĩnh vực học máy được xây dựng trên cơ sở lý thuyết được chứng minh chặt chẽ, mang đến cho lớp bài toán này một quy trình khảo sát được thực hiện tự động. Các kết quả nhận được trong bài báo là hữu ích với các chứng minh rõ ràng. Đó là những mở rộng từ các kết quả chính về các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi con của chuỗi điều hòa, được đề xuất bởi tác giả Đinh Văn Tiệp và cộng sự. Sự mở rộng này theo hướng thực hành và dễ dàng hơn để thực thi. Do đó, trình thực thi được xây dựng trong bài báo áp dụng những kết quả này là khả thi và hiệu quả hơn. Các ứng dụng này hy vọng sẽ là tiền đề được sử dụng trong việc mở rộng theo hướng tối ưu hóa tốc độ và khả năng tính toán khối lượng lớn, cũng như các hướng tiếp cận xấp xỉ hiện đại, chẳng hạn bằng phương pháp Monte-Carlo.

DOI: https://doi.org/10.34238/tnu-jst.6362

* Corresponding author. *Email: tiepdinhvan@gmail.com*

1. Giới thiệu

Ta xem xét chuỗi dương là chuỗi con của chuỗi điều hòa $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, được biểu diễn dưới dạng

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1/n_k \tag{1}$$

Các kết quả trong bài báo [1] đã đưa ra một số công cụ áp dụng tính chất đẹp của các chuỗi (1) như vậy trong việc khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số. Các kết quả này xem xét mật độ phân bố các số hạng của chuỗi số và đánh giá khoảng cách giữa mật độ phân bố các số hạng chuỗi này với chuỗi khác nhằm kết luận tính hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số thứ hai. Khoảng cách giữa hai nghịch đảo của hai số hạng liên tiếp trong chuỗi (1) được xét dựa vào dãy số hạng $\Delta_k := n_{k+1} - n_k, k = 1, 2, \ldots$ Một trong các kết quả quan trọng (Định lý 1) của bài báo [1] là tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi (1) nếu tìm được số thực $\alpha > 1$ sao cho $\lim_{k\to\infty}\inf \frac{\Delta_k}{(k+1)^{\alpha} - k^{\alpha}} > 0.$ Dạng mở rộng của kết quả này sử dụng chuỗi so sánh là một chuỗi dương tổng quát, với các số hạng là một dãy đơn điệu giảm về không (Định lý 2, 3 [1]).

Bài toán học máy khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của một chuỗi số là tiền đề cho bài toán xấp xỉ nghiệm của một phương trình vi phân [2], phương trình đạo hàm riêng, bằng một chuỗi hàm và xấp xỉ giá trị nghiệm của những phương trình này tại một điểm. Trong bài báo này, ta xem xét bài toán đó bằng hướng tiếp cận của học máy, nhằm tự động một cách hệ thống quá trình khảo sát tính kỳ dị của nghiệm những phương trình vừa đề cập ở trên tại một thời điểm cụ thể [3] – [9]. Đây là một hướng tiếp cận mới trên cơ sở của những kết quả lý thuyết thu được trong bài báo về ứng dụng sự hội tụ của chuỗi con của chuỗi điều hòa. Các kết quả lý thuyết này là sự mở rộng theo hướng ứng dụng các kết quả đặc sắc trong bài báo [1]. Tuy nhiên, để có thể xây dựng một trình thực thi dựa trên cơ sở của những kết quả trong bài báo đó gặp khó khăn từ quá trình xem xét giới hạn cho tiệm cận của tỷ số sự phân bố các số hạng tổng quát của chuỗi được khảo sát và chuỗi con của chuỗi điều hòa được tham chiếu. Sự mở rộng trong bài báo này giúp cho việc xây dựng các trình thực thi của quá trình khảo sát sự hội tụ của chuỗi số theo quan điểm của lĩnh vực học máy trở lên khả thi và hiệu quả bằng việc tham chiếu đến tính hội tụ hay phân kỳ của một chuỗi con của chuỗi điều hòa.

Các kết quả thu được từ sự mở rộng đó được trình bày trong mục 2.1 cùng với các ví dụ minh họa. Trong đó, Hệ quả 3 sẽ được sử dụng cho việc xây trình thực thi theo quan điểm học máy bởi tính khả thi và dễ dàng áp dụng. Đây là kết quả đặc sắc cơ bản của bài báo. Bài toán khảo sát chuỗi sự hội tụ của chuỗi số theo hướng tiếp cận của lý thuyết học máy được trình bày ở mục 2.2. Song song với đó, các trình thực thi cũng được xây dựng để khảo sát chuỗi số trên cơ sở các tiêu chuẩn hội tụ và phân kỳ cơ bản. Kết quả thực nghiệm cho các trình thực thi này được đề cập ở mục 3 của bài báo.

2. Ứng dụng sự hội tụ chuỗi con của chuỗi điều hòa và Bài toán học máy khảo sát chuỗi số

2.1. Một số áp dụng sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi con của chuỗi số điều hòa

Tác giả trình bày một số áp dụng sử dụng các kết quả của bài báo [1]. Những áp dụng này có ý nghĩa đối với bài toán học máy cho khảo sát sự hội tụ của một chuỗi số. Trong bốn kết quả dưới đây, ta luôn giả sử rằng dãy số dương $\{a_k\}_{k\ge1}$ hội tụ đến 0, đặt $\delta_k := \frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}$. Các định lý và hệ quả sau thể hiện các áp dụng này.

Định lý 1. Giả sử chuỗi (1) hội tụ, khi đó chuỗi dương $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hội tụ nếu $\lim_k \inf \frac{\delta_k}{\Delta_k} = L > 0$.

Chứng minh. Nếu $0 < L < \infty$, ta suy ra tồn tại $k_0 > 0$ sao cho $\delta_k \ge L\Delta_k, \forall k \ge k_0$. Nếu $L = \infty$, thì với $M > 0$, tồn tại $k_0 > 0$ sao cho $\delta_k \ge M\Delta_k, \forall k \ge k_0$. Do vậy, ta có thể quy trường hợp $L = \infty$ về trường hợp $L < \infty$ bằng cách thay số M trong trường hợp đầu về số L trong trường hợp sau. Vậy, từ đây ta chỉ cần xét trường hợp $L < \infty$. Khi đó,

$$\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k} \geq L(n_{k+1} - n_k), \forall k \geq k_0.$$

$$\Leftrightarrow a_{k+1} \leq \frac{1}{\frac{1}{a_k} + L(n_{k+1} - n_k)} \leq \frac{1}{\frac{1}{a_{k_0}} + Ln_{k_0} - Ln_k}, \forall k \geq k_0.$$

Mặt khác, chuỗi $\sum_{k \geq k_0}^{\infty} \frac{1}{-Ln_k}$ hội tụ, do chuỗi (1) hội tụ, bởi tiêu chuẩn so sánh ta suy ra chuỗi số $\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{a_{k_0}} + Ln_{k_0} - Ln_k}$ hội tụ. Do đó chuỗi số $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hội tụ cũng theo tiêu chuẩn so sánh.

Định lý 2. Giả sử chuỗi (1) phân kỳ. Khi đó, chuỗi $\sum_{k \geq 1} a_k$ phân kỳ nếu $\lim_{k \to \infty} \sup \frac{\delta_k}{\Delta_k} = L < \infty$.

Chứng minh. Áp dụng Định lý Stolz – Cesàro, ta được

$$\infty > L = \lim_{k \to \infty} sup \frac{\delta_k}{\Delta_k} = \lim_{k \to \infty} sup \frac{\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}}{n_{k+1} - n_k} \geq \lim_{k \to \infty} sup \frac{\frac{1}{a_k}}{n_k} = \lim_{k \to \infty} sup \frac{1}{n_k a_k}.$$

Nếu $0 \neq L_1 > L$ thì tồn tại k_0 phụ thuộc L_1 sao cho $L_1 \geq \frac{1}{n_k a_k}, \forall k \geq k_0$. Do đó, $a_k \geq \frac{1}{L_1 n_k}, \forall k \geq k_0$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Hệ quả 3. a) Giả sử chuỗi (1) hội tụ và chuỗi số dương $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ thỏa mãn $\lim\sup(a_k n_k) = L < \infty$. Khi đó, chuỗi thứ hai cũng hội tụ.

b) Giả sử chuỗi (1) phân kỳ và chuỗi số dương $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ thỏa mãn $\lim\inf(a_k n_k) = L > 0$. Khi đó, chuỗi thứ hai cũng phân kỳ.

Ví dụ 1 [8]. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^n}{n^{2n}}$.

Sử dụng Hệ quả 3, xét dãy $\left(n_k = (k/2)^k\right)_{k \geq 1}$. Ta có,

$$\lim a_k n_k = \lim \left[\left(\frac{2k+1}{2k}\right)^k \frac{2^k}{k^k}\right] \frac{k^k}{2^k} = \lim \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^k = \sqrt{e}.$$

Mặt khác, $\frac{1}{(k/2)^k} \leq \frac{1}{2^k}, \forall k \geq 4$, và chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ hội tụ. Do đó, chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k/2)^k}$ và chuỗi đã cho cũng hội tụ.

Hệ quả 4. a) Giả sử chuỗi dương $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hội tụ, thỏa mãn $\lim\inf\left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right) \geq \beta > 1$. Khi đó, chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lfloor a_k^{-1} \rfloor}$ hội tụ.

b) Giả sử chuỗi dương $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ phân kỳ và dãy $(a_k)_{k \geq 1}$ đơn điệu giảm về 0, thỏa mãn $\lim\sup\left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right) \geq \beta > 0$. Khi đó, chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lfloor a_k^{-1} \rfloor}$ phân kỳ.

Chứng minh. a) Bởi định nghĩa của phần nguyên ta có: $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Khi đó, tồn tại $k_\beta > 0$ phụ thuộc β sao cho $\forall k \geq k_\beta$,

$$\frac{\Delta_k}{\delta_k} = \frac{\lfloor a_{k+1}^{-1} \rfloor - \lfloor a_k^{-1} \rfloor}{a_{k+1}^{-1} - a_k^{-1}} > \frac{a_{k+1}^{-1} - 1 - a_k^{-1}}{a_{k+1}^{-1} - a_k^{-1}} = 1 - \frac{1}{a_{k+1}^{-1} - a_k^{-1}} \geq 1 - \frac{1}{\beta} > 0.$$

Do đó, $\lim\inf\frac{\Delta_k}{\delta_k} \geq 1 - \beta^{-1} > 0$. Áp dụng Định lý 1, ta suy ra điều phải chứng minh.

b) Tương tự trên, ta tìm được $k_\beta > 0$ sao cho $\forall k \geq k_\beta$ ta có

$$\frac{\Delta_k}{\delta_k} = \frac{\lfloor a_{k+1}^{-1} \rfloor - \lfloor a_k^{-1} \rfloor}{a_{k+1}^{-1} - a_k^{-1}} < \frac{a_{k+1}^{-1} + 1 - a_k^{-1}}{a_{k+1}^{-1} - a_k^{-1}} = 1 + \frac{1}{a_{k+1}^{-1} - a_k^{-1}} \leq 1 + \frac{1}{\beta} < \infty.$$

Do đó, $\limsup \frac{\Delta_k}{\delta_k} \leq 1 + \beta^{-1} < \infty$. Áp dụng Định lý 3 [1], ta được điều phải chứng minh.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng chuỗi sau hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n^{2n}}{(2n+1)^n} \right\rfloor^{-1}$.

Chứng minh. Ta sẽ kiểm tra điều kiện của Hệ quả 4.a. Thật vậy, xét chuỗi số

$$\sum_{k\geq 1} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)^k}{k^{2k}}$$

$$\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{(k+1)^{k+1}}{\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1}} - \frac{k^k}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k} > \frac{(k+1)^{k+1}}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}} - \frac{k^k}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k}$$

$$> \frac{[(k+1)^k - k^{k-1}](1+k)}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}} = k^{k+1} \frac{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1} - \frac{1+k}{k^2}}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}} = k^{k+1} \left[1 - \frac{1}{k}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k}\right].$$

Vì $\lim \frac{1}{k}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k} = \lim \frac{1}{k} \lim \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k} = 0.e^{-1} = 0$, $\lim k^{k+1}\left[1 - \frac{1}{k}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k}\right] = \infty$.

Do đó, $\liminf \left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right) = \infty$. Điều này thỏa mãn điều kiện của Hệ quả 4.a. Từ đó ta suy ra điều phải chứng minh. □

Ví dụ 3 [2]. Chứng minh rằng chuỗi số sau phân kỳ: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\lfloor n\sqrt{\ln n} \rfloor}$.

Chứng minh. Đầu tiên, bởi tiêu chuẩn tích phân, chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ phân kỳ vì tích phân suy rộng $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = 2\lim_{A\to\infty}\left(\sqrt{\ln A} - \sqrt{\ln 2}\right) = \infty$. Ta sẽ chỉ ra chuỗi số đã cho thỏa mãn điều kiện của Hệ quả 4.b. Thật vậy, ta có

$$a_{n+1}^{-1} - a_n^{-1} = (n+1)\sqrt{\ln(n+1)} - n\sqrt{\ln n} = n\left(\sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln n}\right) + \sqrt{\ln(n+1)}$$

$$= \frac{n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{\ln(n+1)} + \sqrt{\ln n}} + \sqrt{\ln(n+1)}, \lim n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Do đó, $\lim(a_{n+1}^{-1} - a_n^{-1}) = 0 + \lim\sqrt{\ln(n+1)} = \infty$. Tức chuỗi số đã cho thỏa mãn Hệ quả 4.b. Điều này kéo theo chuỗi này phân kỳ.

2.2. Bài toán học máy khảo sát sự hội tụ chuỗi số

Bài toán học máy cho việc khảo sát chuỗi số giúp cho quá trình khảo sát sự hội tụ của chuỗi số trở thành một quá trình tự động và có thể áp dụng cho việc xấp xỉ nghiệm của phương trình vi phân, phương trình đạo hàm riêng. Bài toán học máy khi đó được đặt trong một ứng dụng ý nghĩa thực tiễn lớn với nhiều ứng dụng giá trị [6]-[8]. Trong bài báo này, ta sẽ xem xét bài toán học máy cho việc khảo sát chuỗi số với những chủ đề cơ bản cũng như các khả năng mở rộng vấn đề.

Đối với bài toán khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số, để đưa ra được kết luận chính xác về tính chất này của một chuỗi số bằng các phép xấp xỉ sử dụng các quá trình tự động với hữu hạn tính toán, ta cần xem xét các kết quả khảo sát cho nhiều trường hợp cụ thể (tức với số các số hạng trong chuỗi là hữu hạn và lớn) như thế [8], [9]. Sau đó, bằng các công cụ suy luận thống kê, ta có thể đưa ra quyết định sau cùng với độ tin cậy cao hơn rất nhiều. Trong bài toán đề cập ở bài báo này, ta chỉ xét việc khảo sát thực hiện cho từng trường hợp cụ thể của số các số hạng có trong chuỗi. Phần suy luận thống kê không đề cập ở đây. Ta chia nhỏ bài toán học máy khảo sát chuỗi số theo các chủ đề sau.

2.2.1. Xây dựng các số hạng của chuỗi

Vấn đề xây dựng các số hạng của chuỗi với bài toán học máy bị hạn chế bởi số lượng hữu hạn các phần tử của một dãy vô hạn trên lý thuyết. Bộ nhớ máy tính là hữu hạn làm cho quá trình sinh các phần tử của chuỗi là hữu hạn. Việc xây dựng các số hạng của chuỗi gồm hai phương thức cơ bản là sử dụng biểu thức toán học và sử dụng dãy các số thực. Phương thức thứ nhất có ưu điểm là giúp biểu diễn chuỗi số dễ dàng theo lý thuyết chuỗi, song bị hạn chế bởi thời gian thực hiện tính toán. Phương thức thứ hai sinh ra dãy số theo từng số hạng riêng giẽ và lặp lại quá trình này nhiều lần. Phương thức này không thể tạo ra đồng loạt các số hạng, quá trình lặp làm chậm việc sinh chuỗi, tuy nhiên phương thức này thực thi đơn giản. Đoạn code Python sau mô tả hai phương thức (Method 1, Method 2) sinh các số hạng của chuỗi được đề cập.

```
import numpy as np
import math
term = input("Enter the general term n-th of the series:") # Method 1
    # e.g: Enter the general term n-th of the series:100/n*np.sin(n)
nlimit = np.arange(1,100000)
f = lambda x: eval(term)
xdat = f(nlimit)
Enter the general term n-th of the series:1/x
xdat0 = np.array([])            # define a special series
for i in range(1,100000):
  xdat0 = np.append(xdat0,1/(3*i-1+np.sqrt(i))) # Method 2
```

Xây dựng chuỗi số từ dãy các số hạng tổng quát được thực thi bởi hàm myseries sau.

```
def myseries(n,xdat):
return xdat[0:n].sum()
```

2.2.2. Xây dựng hàm thực thi kiểm tra sự hội tụ của dãy các số hạng của chuỗi

Mục này ta đưa ra trình thực thi kiểm tra tiêu chuẩn hội tụ đến giới hạn L của dãy các số hạng tổng quát của chuỗi. Hàm isconverge2L được dùng để xây dựng quá trình kiểm tra độ lệch giữa các số hạng (biến termn) trong dãy các số hạng tổng quát so với giá trị giới hạn kỳ vọng (mong muốn) L. Giá trị n là số các số hạng được xem xét trong dãy. Biến tol là mức chênh lệch tối đa được phép. Biến max_count cho phép số lần điều kiện mức chênh lệch tối đa bị vi phạm. Nếu vượt quá số lần vi phạm đó, dãy các số hạng của chuỗi được phân loại thành không có giới hạn L. Hàm islimit_L được dùng để xây dựng quá trình kiểm tra sự hội tụ của dãy đến giá trị L thông qua nhiều độ tin cậy với các cấp độ khác nhau theo mức tăng dần độ mịn của mức chênh lệch được phép giữa mỗi số hạng cụ thể của dãy và giá trị L.

```
def isconverge2L(n,termn,tol,max_count,L): # termn is an array
count = 0   # tol is the tolerance epsilon which is a small positve number
outp =  True                    # n is the max number of terms of consideration
i = 1              # max_count used to limit the number of times the sequence
while i < n:                          # L is the limit value of the sequence
  if abs(termn[i]-L) >= tol:
    count += 1
    if count > max_count:
      outp = False
      break
    j = i
    while (j < n) and (abs(termn[j]-L) >= tol):
      j +=1
```

```
            if j < n:
                i = j
            else:
                outp = False
                break
        else:
            i += 1
    return outp
def islimit_L(n,termn,ntol,max_count,isconverge2L,L):
    outp = True # ntol = max number of power of tolerance
    k = 1
    while k<ntol:
        tol = 0.1**k
        if isconverge2L(n,termn,tol,max_count,L):
            k += 1
        else:
            outp = False
            break
    return outp
```

Thực thi đoạn code này với chuỗi tương ứng biến xdat0 ở trên cho ta kết quả sau:

```
islimit_L(99999,xdat0,5,10000,isconverge2L,0)
True
```

Trong ví dụ này, biến xdat0 biểu diễn dãy các phần tử của chuỗi con của chuỗi điều hòa dạng $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1+\sqrt{n}}$. Dãy này thực tế đơn điệu giảm về 0. Kết quả thực thi cũng cho kết luận (True) như vậy.

2.2.3. Xây dựng hàm thực thi kiểm tra sự hội tụ của một chuỗi dương

Trong mục này, ta đưa ra việc xây dựng một số trình thực thi áp dụng những tiêu chuẩn hội tụ cơ bản của một chuỗi số dương. Cụ thể, Tiêu chuẩn căn thức (Root test) và Tiêu chuẩn tỷ số (Ratio test) [2] được lồng ghép vào trình thực thi của bài toán. Những mở rộng khác hoàn toàn có thể thực hiện và thiết kế để tạo ra khối lọc tốt cho bài toán khảo sát chuỗi số. Trong hai trình thực thi này, mức sai số chênh lệch cho phép tối đa là 0,01, cho bởi điều kiện abs(xdat2[-1]-1) <= 0,01.

```
def roottest(xdat):
    xdat0 = xdat[abs(xdat) > 0] # eliminate 0 by overflow
    g = lambda i,x: abs(x)**(1/i)
    xdat2 = np.array([])
    for i in range(1,len(xdat0)):
        xdat2 = np.append(xdat2, g(i,xdat0[i]))
    if islimit_L(len(xdat0)-1,xdat2,6,len(xdat0)*0.1,isconverge2L,xdat2[-1]):
        if abs(xdat2[-1]-1) <= 0.01:
            return xdat2[-1], 'No conclusion'
        else:
            if xdat2[-1] < 1:
                return xdat2[-1], 'Convergent'
            else:
                return xdat2[-1], 'Divergent'
    else:
        return False, fail
def ratiotest(xdat):
    xdat0 = xdat[abs(xdat) > 0] # eliminate 0 by overflow
    xdat2 = np.array([])
    for i in range(1,len(xdat0)-1):
        xdat2 = np.append(xdat2, abs(xdat0[i+1])/abs(xdat0[i]))
```

```
if islimit_L(len(xdat0)-2,xdat2,6,len(xdat0)*0.1,isconverge2L,xdat2[-1]):
   if abs(xdat2[-1]-1) <= 0.01:
      return xdat2[-1], 'No conclusion'
   else:
      if xdat2[-1] < 1:
         return xdat2[-1], 'Convergent'
      else:
         return xdat2[-1], 'Divergent'
else:
   return False, 'fail' # The test could not get a conclusion
```

Một tiêu chuẩn khác được sử dụng dựa vào tính bị chặn của dãy tổng riêng của một chuỗi số dương [2]. Tiêu chuẩn này là một phần trong bộ lọc của hệ thống kiểm tra các tiêu chuẩn hội tụ cho bài toán. Trình thực thi được thể hiện bởi dòng code sau.

```
def partial_sum(xdat):
   sn = np.array([])
   for i in range(1,len(xdat)):
      sn = np.append(sn,myseries(i,xdat))
   ps0 = sn[sn != math.inf]
   return ps0
def issericonverge(hseri): # This test for positive series only
   if roottest(hseri)[1] not in ['fail','No conclusion']:
         outp = roottest(hseri)[1]
   elif ratiotest(hseri)[1] not in ['fail', 'No conclusion']:
         outp = ratiotest(hseri)[1]
   else:
      ps0 = partial_sum(hseri)
      if islimit_L(len(ps0)-1,ps0,8,math.floor(len(ps0)*0.1),isconverge2L,ps0[-1]):
         outp = 'Convergent'
      else:
         outp = 'Divergent'
   return outp
```

2.2.4. Xây dựng hàm thực thi kiểm tra tiêu chuẩn so sánh chuỗi dương khảo sát và một chuỗi con của chuỗi điều hòa

Ta sử dụng Hệ quả 3 để xây dựng trình thực thi đưa ra kết luận của bài toán khảo sát chuỗi số. Trong đoạn code sau, ta xét sự hội tụ của chuỗi dương (biến xseri) với chuỗi con của chuỗi điều hòa (biến hseri). Tiêu chuẩn này xuất ra các kết luận chuỗi hội tụ, phân kỳ, hoặc chưa thể kết luận (cần có thêm tiêu chuẩn hội tụ xây dựng cho bộ lọc, hoặc thêm tham số lọc (tăng giá trị tham số max_count hoặc tăng tham số ntol). Trong trình thực thi dưới đây, các Hệ quả 3 và 4 được sử dụng làm quy tắc đưa ra kết luận về tính hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số dựa trên kết luận về tính hội tụ hay phân kỳ của chuỗi hseri.

```
def comtest1(xseri,hseri):
   ans = issericonverge(hseri)
   if ans == 'Convergent':
      w = True
   elif ans == 'Divergent':
      w = False
   m = min(len(xseri),len(hseri))
   xy = xseri[0:m]/hseri[0:m]
   if islimit_L(m,xy,6,math.floor(len(xy)*0.1),isconverge2L,xy[-1]) and w == True:
      outp = 'Convergent'
   elif (islimit_L(m,xy,6,math.floor(len(xy)*0.1),isconverge2L,xy[-1])) and w == False:
      outp = 'Divergent'
   else:
```

```
    outp = 'No conclusion'
  return outp
```

3. Kết quả thực nghiệm

Ví dụ 4. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1+\sqrt{n}}$ với chuỗi điều hòa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ được sử dụng để so sánh. Kết quả thực thi thu được của quá trình trên như sau:

```
comtest1(xdat0,xdat)
'Divergent'
```

Ví dụ 5. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$ với chuỗi con của chuỗi điều hòa được sử dụng để so sánh là $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. Ta dễ dàng suy ra từ áp dụng Hệ quả 3 rằng vì $\limsup(a_k n_k) = \limsup|\sin(k^2)| \leq 1 < \infty$, chuỗi được xét hội tụ. Kết luận này cũng được xuất ra từ trình thực thi trên.

Ví dụ 6. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n}$ với chuỗi được dùng để so sánh là $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Trong trường hợp này các tiêu chuẩn căn thức, tiêu chuẩn tỷ số, hay Hệ quả 3 đều không thể áp dụng để đưa ra kết luận. Trình thực thi xuất ra kết luận 'No conclusion'.

Ví dụ 7. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\lfloor n\sqrt{\ln n} \rfloor}$ trong Ví dụ 3 với chuỗi được dùng để so sánh là $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$. Kết quả thực nghiệm của trình thực thi cũng phân loại chuỗi thành chuỗi phân kỳ, đồng nhất với kết luận đã chỉ ra trong Ví dụ 3.

4. Kết luận

Bài toán học máy áp dụng cho khảo sát sự hội tụ của chuỗi số là một ứng dụng hữu ích cho hướng tiếp cận theo một quá trình tự động vấn đề khó có hướng tiếp cận thực nghiệm. Nghiên cứu này là tiền đề cho sự phát triển tiếp theo của quá trình xấp xỉ nghiệm của một hệ phương trình vi phân, đạo hàm riêng theo định hướng của lĩnh vực học máy. Bài toán có thể được phát triển ở một cấp độ lớn hơn nhằm tối ưu hóa tính toán và đạt được hiệu quả tốt hơn cũng như trong các chủ đề liên quan đến các mô hình cần có tính thực nghiệm cao.

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

[1] V. T. Dinh and T. T. H. Pham, "The convergence of a sub-series of harmonic series," (in Vietnamese), *TNU Journal of Science and Technology*, vol. 162, no. 02: Natural Sciences - Engineering - Technology, pp. 177-182, 2017.

[2] J. Stewart, *Essential Calculus: Early Transcendentals*, Chapter 11. Belmont, CA: Thomson Higher Education, 2007.

[3] H. Nam, S. Kim and K. Jung, "Number Sequence Prediction Problems for Evaluating Computational Powers of Neural Networks," *Proceedings of the Thirty-Third AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 2019, Art. no. 568, pp. 4626–4633.

[4] N. Srivastava, G. E. Hinton, A. Krizhevsky, I. Sutskever, and R. D. Salakhutdinov, "A simple way to prevent neural networks from overfitting," *Journal of Machine Learning Research*, vol. 15, no. 1, pp. 1929–1958, 2014.

[5] S. Hochreiter and J. Schmidhuber, "Long short-term memory," *Neural computation*, vol. 9, no. 8, pp. 1735–1780, 1997.

[6] N. J. Higham, "The scaling and squaring method for the matrix exponential revisited," *SIAM review*, vol. 51, no. 4, pp. 747-764, 2009.

[7] V. J. Hodge and J. Austin, "A Survey of Outlier Detection Methodologies," *Artificial Intelligence Review*, vol. 22, no. 2, pp. 85–126, 2004.

[8] T. Schmelzer and R. Baillie, "Summing a curious, slowly convergent series," *The American Mathematical Monthly*, vol. 115, no. 6, pp. 545–540, 2008.

[9] R. P. Jr. Boas and J. W. Jr. Wrench, "Partial sums of the harmonic series," *The American Mathematical Monthly*, vol. 78, pp. 864–870, 1971.