

THE HIGHER TOPOLOGICAL COMPLEXITY OF GENERIC ARRANGEMENT

Tran Hue Minh*, Nguyen Van Ninh

TNU - University of Education

ARTICLE INFO	ABSTRACT
Received: 17/02/2023 Revised: 11/4/2023 Published: 17/4/2023	The higher topological complexity is given by Y.B. Rudyak introduced in 2010 as a topological invariant that has many relations with other invariants. It is difficult to compute this invariant in the general case. In this paper, we give the results of higher topological complexity for the complement of generic arrangement in complex space. To get this result, we give the upper bound by constructing local section and the lower bound using isomorphism between the cohomology of complement and the Orlik-Solomon algebra of corresponding arrangement. The results show that the higher topological complexity of the complement of generic arrangements depends only on the number of dimensions of the space and the number of hyperplanes of the arrangement. The calculated results give us one more example to be able to confirm whether the topological complexity of an arrangement of hyperplanes is combinatorial dependent or not.
KEYWORDS Topological complexity Cohomology Homotopy equivalent General position Orlik-Solomon algebra	

ĐỘ PHỨC TẠP TÔ PÔ BẬC CAO CỦA SẮP XẾP GENERIC

Trần Huệ Minh*, Nguyễn Văn Ninh

Trường Đại học Sư phạm - ĐH Thái Nguyên

THÔNG TIN BÀI BÁO	TÓM TẮT
Ngày nhận bài: 17/02/2023 Ngày hoàn thiện: 11/4/2023 Ngày đăng: 17/4/2023	Độ phức tạp tô pô bậc cao được Y.B. Rudyak đưa ra năm 2010, đây là một bất biến tô pô có nhiều liên hệ với các bất biến khác. Việc tính toán bất biến này trong trường hợp tổng quát là khó. Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra kết quả về độ phức tạp tô pô bậc cao cho phần bù các sắp xếp generic trong không gian phức. Để đưa ra được kết quả này chúng tôi lần lượt đưa ra chặn trên bằng cách xây dựng các nhát cắt địa phương và đưa ra chặn dưới bằng cách sử dụng tính đẳng cấu giữa đối đồng điều của phần bù và đại số Orlik-Solomon của sắp xếp tương ứng. Kết quả chỉ ra rằng độ phức tạp tô pô bậc cao của phần bù các sắp xếp generic chỉ phụ thuộc vào số chiều của không gian và số siêu phẳng của sắp xếp. Kết quả được tính toán cho ta thêm một ví dụ để có thể khẳng định độ phức tạp tô pô của một sắp xếp các siêu phẳng có phụ thuộc tổ hợp hay không.
TỪ KHÓA Độ phức tạp tô pô Đối đồng điều Tương đương đồng luân Vị trí tổng quát Đại số Orlik-Solomon	

DOI: <https://doi.org/10.34238/tnu-jst.7352>

* Corresponding author. Email: minhth@tnue.edu.vn

1. Giới thiệu

Cho X là một không gian tô pô, PX là không gian các đường liên tục trong X và $\pi: PX \rightarrow X \times X$ là ánh xạ biến mỗi đường γ thành cặp điểm đầu và điểm cuối của γ hay $\pi(\gamma) = (\gamma(0); \gamma(1))$. Đây là một phân thớ theo nghĩa Serre. Độ phức tạp tô pô $TC(X)$ của X được M. Farber định nghĩa trong [1] chính là giống Schwarz (xem [2]) của π . Trong [3], Yu. Rudyak đã mở rộng khái niệm này thành khái niệm độ phức tạp tô pô bậc cao (hoặc xem [4]). Với $n \geq 2$, đặt J_n là tích kết của n đoạn đơn vị $[0; 1]_i$, $i = 1, \dots, n$, với $0_i \in [0; 1]_i$ được đồng nhất, X^{J_n} là không gian tất cả các hàm liên tục từ J_n vào X với tô pô compact mở. Xét phân thớ

$$e_n: X^{J_n} \rightarrow X^n$$

$$\gamma \mapsto (\gamma(1_1), \dots, \gamma(1_n))$$

với 1_i là phần tử 1 trong $[0; 1]_i$. Đây chính là một cái thể phân thớ của ánh xạ đường chéo $d_n: X \rightarrow X^n$ (xem [3]).

Định nghĩa 1. Độ phức tạp tô pô bậc cao của $TC_n(X)$ của không gian X là số k nhỏ nhất sao cho tồn tại một phủ mở $\{U_1, \dots, U_k\}$ của X^n bởi k tập mở và với mỗi tập mở tồn tại một nhất cắt địa phương $s_i: U_i \rightarrow X^{J_n}$ của e_n , nghĩa là $e_n \circ s_i = id_{U_i}$.

Sau đây là một số tính chất quan trọng của TC_n .

i) TC_n là một bất biến đồng luân.

ii) Cho X là không gian liên thông đường có kiểu đồng luân của một CW - phức n chiều thì

$$TC_n(X) \leq n \dim X + 1 \quad (1)$$

iii) Cho X và Y là các không gian liên thông đường. Khi đó,

$$TC_n(X \times Y) \leq TC_n(X) + TC_n(Y) - 1. \quad (2)$$

iv) Vì e_n là cái thể phân thớ của ánh xạ $d_n: X \rightarrow X^n$ nên ta có tính chất sau: Giả sử m là một số nguyên dương, $u_i \in H^*(X^n)$ với $i = 1, \dots, m$ là các lớp đối đồng điều thỏa mãn $d_n^*(u_i) = 0$ và $u_1 \cup u_2 \cup \dots \cup u_m \neq 0 \in H^*(X^n)$. Khi đó, $TC_n(X) \geq k + 1$.

Độ phức tạp tô pô bậc cao đã được tính cho các mặt cầu và tích của các mặt cầu bởi Basabe và cộng sự [4], và một số không gian cầu hình bởi J. González, B. Gutiérrez [5].

Chúng tôi quan tâm đến độ phức tạp tô pô bậc cao của phần bù các sắp xếp siêu phẳng. Trong [6] và [7], chúng tôi đã tính toán TC_n cho phần bù của các đường thẳng phức và phần bù của sắp xếp kiểu thớ. Trong bài báo này, chúng tôi tính TC_n cho phần bù của một sắp xếp generic.

2. Sơ lược về vấn đề nghiên cứu

Trước hết, chúng ta nhắc lại một số khái niệm cần thiết trong lý thuyết sắp xếp siêu phẳng. Đặt V là không gian véc tơ phức r chiều. Một siêu phẳng H trong V là một không gian afin con $(r-1)$ chiều của V . Siêu phẳng V có thể xem là hạt nhân của đa thức α_H bậc 1 được xác định sai khác một hằng số khác không. Một r - sắp xếp các siêu phẳng $\mathcal{A}$ trong V là một tập hữu

hạn các siêu phẳng $\{H_1, \dots, H_l\}$ trong V . Đa thức $Q(\mathcal{A}) \doteq \prod_{H_i \in \mathcal{A}} \alpha_{H_i} \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_r]$ được gọi là đa thức xác định của $\mathcal{A}$. Phần bù của $\mathcal{A}$ được xác định là

$$M(\mathcal{A}) = \mathbb{C}^r \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H.$$

$\mathcal{A}$ được gọi là sắp xếp tâm nếu $\bigcap_{i=1}^l H_i \neq \emptyset$. Nếu $T = \bigcap_{i=1}^l H_i \neq \emptyset$ thì ta gọi $\mathcal{A}$ là sắp xếp tâm với tâm T . Nếu $\mathcal{A}$ có tâm, thì ta có thể chọn hệ trục tọa độ afin sao cho tất cả các siêu phẳng đi qua gốc tọa độ. Một sắp xếp được gọi là *tâm thực chất* nếu T chỉ gồm 1 điểm gốc tọa độ.

Cho một $(r+1)$ - sắp xếp tâm $\mathcal{A}$ chứa l siêu phẳng với đa thức xác định $Q(\mathcal{A}) \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_r]$. Ta xây dựng một r - sắp xếp với $l-1$ siêu phẳng được kí hiệu bởi $d\mathcal{A}$. Ở đây, $Q(d\mathcal{A})$ được xác định bằng cách thay x_0 bởi 1 trong đa thức $Q(\mathcal{A})$. $d\mathcal{A}$ được gọi là giải nón của $\mathcal{A}$.

Định nghĩa 2. Một r - sắp xếp tâm $\mathcal{A}$ với $r \geq 2$ được gọi là sắp xếp generic nếu với mọi tập con $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ với $|\mathcal{B}| \leq r$ thì tập các hàm xác định các siêu phẳng của $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính.

Nếu $\mathcal{A}$ là một r - sắp xếp generic chứa l siêu phẳng với $l \leq r$, khi đó ta có thể chọn lại hệ trục tọa độ sao cho đa thức xác định có dạng $Q(\mathcal{A}) = x_1 \dots x_l$. Do đó, $M(\mathcal{A})$ có kiểu đồng luân của một l - xuyên T^l . Từ đó ta có $TC_n(M(\mathcal{A})) = l+1$ (xem [4]). Đây là một trường hợp đặc biệt của định lý chính. Vậy ta chỉ cần xét trường hợp $l > r$.

Định nghĩa 3. Một r - sắp xếp $\mathcal{A}$ được gọi là sắp xếp ở vị trí tổng quát nếu với mọi tập con $\{H_{i_1}, \dots, H_{i_p}\} \subseteq \mathcal{A}$ với $p \leq r$, $H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_p}$ là một không gian afin con có đối chiều p và với $p > r$ thì $H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_p} = \emptyset$.

Ta có một sắp xếp $\mathcal{A}$ là generic khi và chỉ khi giải nón $d\mathcal{A}$ là một $(r-1)$ - sắp xếp ở vị trí tổng quát (xem [8]).

Để chứng minh cho trường hợp tổng quát, ta sẽ lần lượt đưa ra chặn dưới và chặn trên cho $TC_n(M)$. Để đưa ra được chặn dưới, chúng tôi sử dụng sự đẳng cấu của đại số đối đồng điều của M với đại số Orlik-Solomon, từ đó tính toán trực tiếp trên các phần tử của đại số Orlik-Solomon. Để đưa ra chặn trên, ta sẽ sử dụng định lý của Hatori để đưa ra kiểu đồng luân của phần bù, từ đó xây dựng trực tiếp các nhất cắt địa phương của e_n .

3. Kết quả chính

Định lý. Cho $\mathcal{A}$ là sắp xếp generic gồm l siêu phẳng phức trong $\mathbb{C}^r$, $l \geq r$ và $M = \mathbb{C}^r \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$ là phần bù. Khi đó

$$TC_n(M) = \min\{(n-2)r + l + 1; nr\}.$$

Chứng minh: Chứng minh của định lý sẽ chia làm hai phần.

Chặn dưới: Bằng việc sử dụng kết quả về sự đẳng cấu của $H^*(M; \mathbb{C})$ với đại số Orlik - Solomon $A(\mathcal{A})$ của $\mathcal{A}$ như các đại số phân bậc (xem [8]) và kết hợp với việc sử dụng tính chất chặn dưới (iv), ta sẽ đưa ra chặn dưới của TC_n bằng việc sử dụng đại số Orlik - Solomon.

Vì $\mathcal{A}$ là sắp xếp generic nên đại số $A(\mathcal{A})$ có các phần tử sinh $a_0, \dots, a_{l-1}$ với quan hệ như sau $a_i^2 = 0$, $a_i a_j = -a_j a_i$ và nếu $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{0, 1, \dots, l-1\}$, $k \leq r$ thì $a_I = a_{i_1} \dots a_{i_k} \neq 0$. Tập hợp các phần tử a_I , $I = \{i_1 < \dots < i_k\} \subset \{0, 1, \dots, l-1\}$ là một cơ sở (như không gian véc tơ phức) của $A(\mathcal{A})$ (xem [8]).

Coi các phần tử a_i như các phần tử trong $H^*(M; \mathbb{C})$, khi đó với mỗi a_i ta đặt

$$\bar{a}_i = 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \bar{a}_i \otimes \dots \otimes 1 - 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes a_i \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1, \text{ với } t = 2, \dots, n.$$

Đặt $p = \min\{l-1, 2r-2\}$, $J = \{0, 1, \dots, p\}$, $I \subset J$ với $|I| = r$. Xét phần tử

$$\pi = \prod_{i \in I} \left(\prod_{t=2}^n \bar{a}_i \right) \cdot \prod_{i \in J \setminus I} a_i.$$

Trong khai triển của π có số hạng $\pm a_I \otimes \dots \otimes a_I \otimes a_{J \setminus I}$ bậc $(n-2)r + p + 1$ không bị triệt tiêu bởi các số hạng khác. Do đó, ta có $\pi \neq 0$.

Mặt khác, $d_n^* \bar{a}_i = 0$ với mọi $i = 0, 1, \dots, l-1$ và $t = 2, \dots, n$. Từ đó ta suy ra

$$TC_n(M) \geq (n-1)r + (p+1) - r + 1 = \min\{(n-2)r + l + 1; nr\}. \quad (3)$$

Chặn trên: Với mỗi sắp xếp tâm trong không gian véc tơ phức, ta có phần bù $M(\mathcal{A})$ tương đương đồng luân với $\mathbb{S}^1 \times M(d\mathcal{A})$ (xem [8]). Vì $\mathcal{A}$ là sắp xếp generic gồm l siêu phẳng với $l \geq r$ nên $d\mathcal{A}$ là một $(r-1)$ -sắp xếp ở vị trí tổng quát gồm $l-1$ siêu phẳng. Áp dụng định lý của Hattori (xem [9]), ta có $M(d\mathcal{A})$ tương đương đồng luân với M_0 , với

$$M_0 = \bigcup_{|I|=r-1} T_I^{l-1}, T_I^{l-1} = \{(z_1, \dots, z_{l-1}) \in T^{l-1} \mid z_j = 1 \text{ nếu } j \notin I \subset \{1, \dots, l-1\}\}.$$

Áp dụng tính chất (i) và bất đẳng thức (2) của TC_n ta có

$$\begin{aligned} TC_n(M) &= TC_n(\mathbb{S}^1 \times M_0) \leq TC_n(\mathbb{S}^1) + TC_n(M(d\mathcal{A})) - 1 \\ &= TC_n(\mathbb{S}^1) + TC_n(M_0) - 1. \end{aligned}$$

Từ M_0 là một khung CW -phức $(r-1)$ chiều của T^{l-1} nên áp dụng (1) ta được

$$TC_n(M_0) \leq n(r-1) + 1.$$

Mặt khác ta có $TC_n(\mathbb{S}^1) = n$ (xem [3]). Từ đó suy ra

$$TC_n(M) \leq n + (n(r-1) + 1) - 1 = nr.$$

Nếu $l+1 \geq 2r$ thì $TC_n(M) = nr = \min\{(n-2)r + l + 1; nr\}$, từ đó ta có điều phải chứng minh. Vì vậy, ta chỉ cần xét trường hợp $l+1 < 2r$. Nghĩa là ta chứng minh $TC_n(M_0) \leq (n-2)(r-1) + l$.

Thật vậy, ta sẽ phân tích $(M_0)^n$ thành hợp của $(n-2)(r-1) + l$ tập con ENR và xây dựng các nhát cắt địa phương trên từng tập con trên.

Với mỗi tập con $J \subset \{1, \dots, l-1\}$, $I \subset \{2, \dots, n-1\}$, ta xét các tập con của $(T^{l-1})^n$ như sau

$$F'_J = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) \mid u_{1j} = u_{2j} = \dots = u_{nj} \text{ nếu và chỉ nếu } j \in J\},$$

$$U'_{IJ} = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) \mid u_{1j} = u_{ij} \text{ nếu và chỉ nếu } i \in I, j \in J\}.$$

Đặt:

$$F_0 = F'_0 \cap (M_0)^n, \text{ với } F'_0 = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) \mid u_{1j} \neq u_{ij} \text{ với mọi}$$

$$i = 2, \dots, n, j = 1, \dots, l-1\}, F_j = \bigcup_{|J|=j} F'_J, j = 1, \dots, l-1 \text{ với } F'_J = F'_J \cap (M_0)^n,$$

$$U_{st} = \bigcup_{|I|=s, |J|=t} U_{IJ}, s = 1, \dots, n-2, t = 1, \dots, r-1 \text{ với } U_{IJ} = U'_{IJ} \cap (M_0)^n.$$

Khi đó, các tập F_j với $j = 0, 1, \dots, l-1$ và U_{st} với $s = 1, \dots, n-1$ và $t = 1, \dots, r-1$ là một phủ của $(M_0)^n$ chứa $(n-2)(r-1) + l$ tập con. Tiếp theo, ta sẽ xây dựng các nhát cắt liên tục của e_n trên mỗi tập con này. Ta có, F_j là hợp rời của các tập F'_J và mỗi tập U_{st} cũng là hợp rời của các tập U_{IJ} . Do đó, ta chỉ cần xây dựng nhát cắt trên mỗi tập F'_J và U_{IJ} .

Với hai điểm $u, u' \in M_0$ ta xác định một đường đi $l_{(u,u')}$ trong M_0 từ u đến u' như sau: Giả sử $u = (u_1, \dots, u_{l-1})$ và $u' = (u'_1, \dots, u'_{l-1})$. Khi đó, ta đặt $l_{(u,u')}(t) = (l_{(u,u')}(t)_1, \dots, l_{(u,u')}(t)_{l-1})$, với tọa độ thứ j là $l_{(u,u')}(t)_j$ được cho bởi công thức sau:

- Nếu $u_j = u'_j$ thì $l_{(u,u')}(t)_j = u_j = u'_j$ với mọi $t \in [0; 1]$.
- Nếu $u_j \neq u'_j$ thì

$$l_{(u,u')}(t)_j = \begin{cases} u_j & \text{khi } 0 \leq t < \tau(u_j); \\ \eta_{u_j, u'_j} \left(\frac{t - \tau(u_j)}{1 - \tau(u_j) - \tau(u'_j)} \right) & \text{khi } \tau(u_j) \leq t < 1 - \tau(u'_j); \\ u'_j & \text{khi } 1 - \tau(u'_j) \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Với $\eta_{z,z'}$ là cung tròn nối hai điểm từ z tới z' cho bởi công thức $\eta_{z,z'}(t) = e^{i((1-t)\varphi + t\varphi')}$, $t \in [0; 1]$, với $z = e^{i\varphi}$, $z' = e^{i\varphi'}$, $0 \leq \varphi, \varphi' < 2\pi$. Tham số t của l được chia thành ba phần bởi tham số hóa $\tau: \mathbb{S}^1 \rightarrow [0, 1/2]$ xác định bởi

$$\tau(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 - \frac{|z-1|}{\sqrt{2}}) & \text{khi } |z-1| \leq \sqrt{2} \\ 0 & \text{khi } |z-1| > \sqrt{2} \end{cases}$$

Dễ thấy rằng $l_{(u,u')}(t)$ xác định với mọi $u, u' \in T^{l-1}$ và là một đường liên tục nối $l_{(u,u')}(0) = u$ với $l_{(u,u')}(1) = u'$.

Tiếp theo, ta cần kiểm tra $l_{(u,u')}(t)$ nằm trên M_0 với mọi $t \in [0; 1]$ và $u, u' \in M_0$. Nghĩa là với mỗi $t \in [0; 1]$, $l_{(u,u')}(t)$ có ít nhất $l-r$ tọa độ bằng 1.

Giả sử $u \in T_I^{l-1}, u' \in T_{I'}^{l-1}$ với $I, I' \subset \{1, \dots, l-1\}, |I| = |I'| = r-1$. Kí hiệu $\bar{I} = \{1, \dots, l-1\} \setminus I$, $\bar{I}' = \{1, \dots, l-1\} \setminus I'$ và đặt $I_0 = \bar{I} \cap \bar{I}'$. Khi đó ta có $|\bar{I}| = |\bar{I}'| = l-r$.

Với bất kì $t \in [0; 1]$, xét chỉ số $j \in I_0$. Vì $j \notin I$ và $j \notin I'$ nên $u_j = u'_j = 1$ và từ định nghĩa ta có $l_{(u,u')}(t)_j = u_j = u'_j = 1$ với mọi $t \in [0; 1]$.

Với $t \in [0; \frac{1}{2}]$ ta xét chỉ số $j \in \bar{I} \setminus I_0$. Vì $j \notin I$ nên $u_j = 1$. Do đó, $\tau(u_j) = \frac{1}{2}$, suy ra $l_{(u,u')}(t)_j = u_j = 1$ với mọi $t \in [0; \frac{1}{2}]$.

Với $t \in [\frac{1}{2}; 1]$, ta xét chỉ số $j \in \bar{I}' \setminus I_0$. Vì $j \notin I'$ nên $u'_j = 1$. Do đó, $\tau(u'_j) = \frac{1}{2}$, suy ra $l_{(u,u')}(t)_j = u'_j = 1$ với mọi $t \in [\frac{1}{2}; 1]$.

Vậy với mỗi $t \in [0; 1]$, $l_{(u,u')}(t)$ có ít nhất $l - r$ tọa độ bằng 1, $l_{(u,u')}(t)$ nằm trên M_0 .

Xét ánh xạ $s : M_0^n \rightarrow M_0^{J_n}$ xác định bởi $s(u_1, u_2, \dots, u_n) = (l_{(u_1, u_1)}, l_{(u_1, u_2)}, \dots, l_{(u_1, u_n)})$.

Từ cách xây dựng $l_{(u,u')}$ ta suy ra hạn chế của s trên các tập hợp F_j, F_0, U_{IJ} phụ thuộc liên tục theo $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ và là nhát cắt của e_n trên các tập F_j, U_{st} . Hơn nữa, các tập hợp F_j, U_{st} với $j = 0, \dots, l-1, s = 1, \dots, n-1$ và $t = 1, \dots, r-1$ đều là các tập ENR. Do đó, $TC_n(M_0) \leq (n-2)(r-1) + l$. Vậy

$$TC_n(M) \leq n + (n-2)(r-1) + l - 1 = (n-2)r + l + 1.$$

$$\text{Vì } l+1 < 2r \text{ nên } TC_n(M) \leq \min\{(n-2)r + l + 1; nr\}. \quad (4)$$

Kết hợp (3) và (4) ta được điều phải chứng minh.

4. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra kết quả về độ phức tạp tô pô bậc cao của phần bù một sắp xếp generic. Khi tìm chặn dưới chúng tôi sử dụng sự đẳng cấu của đối đồng điều của phần bù với đại số Orlik-Solomon của sắp xếp siêu phẳng đó. Khi tìm chặn trên, bằng việc sử dụng kiểu đồng luân của phần bù chúng tôi đã xây dựng trực tiếp các nhát cắt địa phương.

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

- [1] M. Faber, "Topological complexity of motion planning," *Discrete Comput. Geom*, vol. 29, pp. 211 - 221, 2003.
- [2] A. S. Schwarz, "The genus of fiber space," *Amer. Math. Sci. Transl*, vol. 55, pp. 49 - 140, 1966.
- [3] Y. B. Rudyak, "On higher analogs of topological complexity," *Topology and its Application*, vol. 157, pp. 916 - 920, 2010.
- [4] I. Basabe, J. González, Y. B. Rudyak, and D. Tamaki, "Higher topological complexity and homotopy dimension of configuration spaces on spheres," *Algebr. Geom. Topol*, vol. 14, pp. 2103 - 2124, 2014.
- [5] J. González and B. Gutiérrez, "Topological complexity of collision-free multi-tasking motion planning on orientable surfaces," *arxiv:1607.07667*, 2016.
- [6] H. M. Tran and V. N. Nguyen, "The higher topological complexity of a complement of complex lines arrangement," *TNU Journal of Science and Technology*, vol. 225, no. 06, pp. 255 - 257, 2020.
- [7] V. D. Nguyen and V. N. Nguyen, "The Higher Topological Complexity of Complement of Fiber Type Arrangement," *Acta Mathematica Vietnamica*, vol. 42, pp. 249 - 256, 2017.
- [8] P. Orlik and H. Terao, *Arrangements of hyperplanes*, Springer - Verlag, 1992.
- [9] A. Hattori, "Topology of $\mathbb{C}^n$ minus a finite number of affine hyperplanes in general position," *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, vol. 22, pp. 205 - 219, 1975.