

NATURAL VIBRATIONS OF COMPOSITE BEAMS REINFORCED WITH NANO CARBON TUBES ON ELASTIC FOUNDATIONS ACCORDING TO THE THEORY OF HIGH-ORDER SHEAR STRAIN

Nguyen Dang Diem*, Nguyen Loc Kha

University of Transport and Communications

ARTICLE INFO	ABSTRACT
Received: 13/7/2023	This paper develops the Ritz method to analyze the natural vibrations of laminated composite beams reinforced with Nano Carbon tubes. Beams placed on elastic foundation with Winkler elastic foundation model and beam calculation theory according to high-order shear strain theory. The central system of equations of the problem is established by the energy method combined with the Lagrangian - II equation. The results calculated by the proposed method are compared with those calculated by the finite element method to check suitability and accuracy. The investigation results show that: The elastic foundation coefficient affects almost linearly to the natural vibration frequency of the beam. The beam's natural frequency increases as the volume ratio of the Nano Carbon fiber increases. At the same time, in all distribution forms of Nano Carbon fiber, the X-shaped distribution or the beam with the greatest stiffness and the double-ended connection type is the mount with the highest vibration frequency in the investigated connection cases. In addition, when the angle of inclination of the Nano Carbon fiber increases or the ratio of span length and section height increases, the vibration frequency of the beam decreases.
Revised: 17/10/2023	
Published: 18/10/2023	
KEYWORDS	
Natural vibrations	
Nano Carbon tubes	
Ritz method	
High-order shear strain	
Composite beams	

DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA DẦM COMPOSITE LỚP GIA CƯỜNG ỨNG NANO CARBON TỰA TRÊN NỀN ĐÀN HỒI THEO LÝ THUYẾT BIẾN DẠNG CẮT BẬC CAO

Nguyễn Đăng Diễm*, Nguyễn Lộc Kha

Trường Đại học Giao thông vận tải

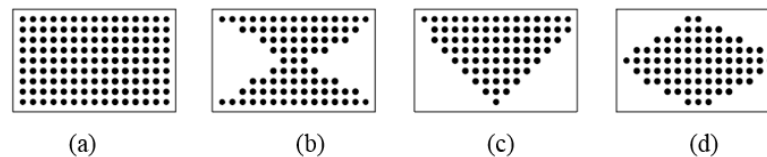
THÔNG TIN BÀI BÁO	TÓM TẮT
Ngày nhận bài: 13/7/2023	Bài báo phát triển phương pháp Ritz để phân tích dao động tự do của dầm composite nhiều lớp gia cường ống Nano Carbon. Dầm đặt trên nền đàn hồi với mô hình nền đàn hồi Winkler và lý thuyết tính toán dầm theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao. Hệ phương trình chủ đạo của bài toán được thiết lập bằng phương pháp năng lượng kết hợp với phương trình Lagrangian - II. Kết quả tính toán bằng phương pháp đề xuất được so sánh với kết quả tính toán bằng phương pháp phần tử hữu hạn để kiểm tra sự phù hợp và tính chính xác. Kết quả khảo sát ảnh hưởng của các yếu tố đến tần số dao động tự do cho thấy: Hệ số nền đàn hồi ảnh hưởng gần như tuyến tính đến tần số dao động tự do của dầm. Tần số dao động tự do của dầm tăng khi tỷ lệ thể tích của sợi Nano Carbon tăng. Đồng thời kiểu phân bố của Nano Carbon dạng X hoặc kiểu liên kết hai đầu là ngàm thì dầm có tần số dao động lớn nhất trong các trường hợp khảo sát. Khi góc nghiêng của sợi Nano Carbon tăng hoặc tỷ lệ giữa chiều dài nhịp và chiều cao mặt cắt tăng dẫn đến tần số dao động tự do của dầm giảm.
Ngày hoàn thiện: 17/10/2023	
Ngày đăng: 18/10/2023	
TỪ KHÓA	
Dao động tự do	
Ống Nano Carbon	
Phương pháp Ritz	
Biến dạng cắt bậc cao	
Dầm composite	

DOI: <https://doi.org/10.34238/tnu-jst.8324>

* Corresponding author. Email: diemnd_ph@utc.edu.vn

1. Đặt vấn đề

Hiện nay vật liệu composite được sử dụng rộng rãi trong các ngành như: Giao thông vận tải, xây dựng, hàng không. Dựa trên ý tưởng về vật liệu có tính chất cơ lý biến thiên (FGM) và những tính chất của vật liệu Nano Carbon (CNT) năm 2010 Shen H.-S và Zhang [1] đã đề xuất vật liệu composite gia cường ống CNT. Trong đó vật liệu CNT được phân bố theo các quy luật khác nhau trên vật liệu nền là nhựa polyme hoặc kim loại. Vật liệu composite đơn lớp gia cường CNT được phân chia thành 4 dạng chính như Hình 1: Dạng FG-UD, dạng FG-X, dạng FG-V và dạng FG-O.



Hình 1. Các kiểu phân bố CNT: (a) Dạng FG-UD, (b) Dạng FG-X, (c) Dạng FG-V, (d) Dạng FG-O

Dầm composite gia cường ống Nano Carbon (FGM-CNT) thu hút được sự quan tâm của các nhà khoa học. Reddy và các cộng sự [2] đã đề xuất mô hình tính toán dầm composite lớp theo các lý thuyết biến dạng cắt khác nhau. Kamarian S. và các cộng sự [3] phân tích dao động tự do của dầm Sandwich sử dụng lớp vật liệu FGM-CNT tựa trên nền đàn hồi Pasternak với mô hình dầm Timoshenko. Shen H. S. và Xiang Y. [4] phân tích phi tuyến dầm FGM-CNT trên nền đàn hồi sử dụng theo mô hình nền Pasternak chịu ảnh hưởng của nhiệt độ. Wattanasakulpong và các cộng sự [5] sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc ba để phân tích dầm FGM-CNT đơn lớp với mô hình dầm được tựa trên nền đàn hồi theo mô hình nền của Pasternak với hướng tiếp cận giải tích và lời giải Navier cho kết cấu dầm tựa đơn. Yang J. và các cộng sự [6] phân tích phi tuyến dầm FGM-CNT trên nền đàn hồi, điểm mới của nhóm tác giả là xét đến biến dạng của nền Pasternak không tuyến tính thông qua hệ số Poisson âm. Rafiee M. và các cộng sự [7] sử dụng lý thuyết dầm Euler-Bernoulli và lý thuyết trường biến dạng phi tuyến hình học Von-Kármán phân tích ổn định dầm FGM-CNT có lớp điện áp. Asadi H. và Amin Rabiei B. [8] sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất phân tích dầm FGM-CNT tiếp xúc với luồng không khí siêu âm dọc trục trong điều kiện nhiệt của môi trường. Lin F. và Xiang Y. [9] phân tích dao động tự do của dầm FGM-CNT đơn lớp theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất và lý thuyết biến dạng cắt bậc ba. Voduy T. và các cộng sự [10] nghiên cứu dao động tự do của dầm FGM-CNT nhiều lớp bằng cách sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất và phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) để phân tích.

Trong thực tiễn vật liệu composite gia cường ống Nano Carbon được sử dụng để tăng cường khả năng chịu lực của các cấu kiện cũ bằng cách dán nên bề mặt cấu kiện. Khi các tấm gia cường này làm việc một phương có thể lý tưởng hóa là các dầm tựa trên nền đàn hồi. Với độ cứng của nền đàn hồi là độ cứng của cấu kiện cũ. Các nghiên cứu đã công bố chủ yếu tập trung vào đối tượng dầm composite đơn lớp với hướng tiếp cận giải tích theo lời giải của Navier áp dụng được cho kết cấu tựa đơn, không giải được các kết cấu có dạng liên kết khác. Hoặc dầm nhiều lớp theo hướng FEM khi xét đến lý thuyết biến dạng cắt bậc cao đòi hỏi chuyển vị phải khả vi bậc 2 dẫn đến bậc tự do của một nút tăng và khối lượng tính toán lớn. Vì vậy bài báo này nghiên cứu dao động tự do của dầm FGM-CNT nhiều lớp tựa trên nền đàn hồi bằng phương pháp Ritz có thể áp dụng cho các cấu kiện có các dạng liên kết khác nhau khắc phục được nhược điểm của lời giải Navier. Ngoài ra trường chuyển vị được giả sử là chuỗi hữu hạn của các hàm xác định nên khối lượng tính toán ít và kết quả hội tụ nhanh. Biến dạng cắt bậc cao phù hợp hơn với thực tế bài toán vì dạng cắt thay đổi trên toàn bộ mặt cắt. Khắc phục được nhược điểm của lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất coi biến dạng cắt là hằng số trên toàn bộ mặt cắt hoặc lý thuyết dầm cổ điển bỏ qua biến dạng của lực cắt. Đồng thời bài báo cũng khảo sát ảnh hưởng của các yếu tố như: Hệ số nền, các tính chất của vật liệu CNT và điều kiện biên đến tần số dao động tự do của dầm.

2. Thiết lập các phương trình cơ bản của bài toán

Xét dầm composite gồm n lớp, được đặt trên nền đàn hồi theo mô hình nền Winkler có hệ số nền K . Các hằng số tính chất vật liệu composite gia cường ống CNT [10] được xác định:

$$E_{11} = \eta_1 V_{CNT} E_{CNT} + V_m E_m \quad (1)$$

$$\frac{\eta_2}{E_{22}} = \frac{V_{CNT}}{E_{CNT}} + \frac{V_m}{E_m} \quad (2)$$

$$\frac{\eta_3}{G_{12}} = \frac{V_{CNT}}{G_{12}^{CNT}} + \frac{V_m}{G_m} \quad (3)$$

$$\nu_{12} = V_{CNT} \nu_{12}^{CNT} + V_m \nu_m \quad (4)$$

$$\rho = V_{CNT} \rho^{CNT} + V_m \rho_m \quad (5)$$

Tùy thuộc vào dạng phân bố CNT [1] mà tỷ lệ thể tích của CNT tại vị trí z thuộc lớp k được xác định như (6) – (9)

$$+ \text{Dạng FG - UD: } V_{CNT} = V_{CNT}^* \quad (6)$$

$$+ \text{Dạng FG - X: } V_{CNT} = 4 \frac{\left| z - \frac{z_{k+1} + z_k}{2} \right|}{z_{k+1} - z_k} V_{CNT}^* \quad (7)$$

$$+ \text{Dạng FG - V: } V_{CNT} = 2 \frac{z - z_k}{z_{k+1} + z_k} V_{CNT}^* \quad (8)$$

$$+ \text{Dạng FG - O: } V_{CNT} = \left(2 - 4 \frac{\left| z - \frac{z_{k+1} + z_k}{2} \right|}{z_{k+1} - z_k} \right) V_{CNT}^* \quad (9)$$

Trong đó:

+ η_1, η_2, η_3 : Các hệ số phụ thuộc vào tỷ lệ thể tích của ống Nano Carbon;

+ E_m, G_m, ν_m, ρ_m : Mô đun đàn hồi, mô đun đàn hồi cắt, hệ số Poission, mật độ khối lượng của vật liệu nền;

+ $E^{CNT}, G^{CNT}, \nu^{CNT}, \rho^{CNT}$: Mô đun đàn hồi, mô đun đàn hồi cắt, hệ số Poission, mật độ khối lượng của CNT;

+ V_{CNT}, V_{CNT}^* : Tỷ lệ thể tích của CNT tại vị trí z trong lớp thứ k và trong toàn bộ lớp;

+ V_m : Tỷ lệ thể tích của vật liệu nền;

+ $E_{11}, E_{12}, G_{12}, \nu_{12}, \rho$: Mô đun đàn hồi dọc, Mô đun đàn hồi ngang, mô đun đàn hồi cắt, hệ số Poission, mật độ khối lượng của vật liệu Composite gia cường CNT.

Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng trong trường hợp lớp k đồng phương đồng trục:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11}(z) & 0 \\ 0 & Q_{55}(z) \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}_k \quad (10)$$

Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng trong trường hợp lớp k đồng phương lệch trục:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}(z) & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{55}(z) \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}_k \quad (11)$$

$$\bar{Q}_{11}(z) = Q_{11}(z) \cos^4 \theta_k + 2[Q_{12}(z) + 2Q_{66}(z)] \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{22}(z) \sin^4 \theta_k \quad (12)$$

$$\bar{Q}_{55}(z) = Q_{44}(z) \sin^2 \theta_k + Q_{55}(z) \cos^2 \theta_k \quad (13)$$

Trong đó:

+ $Q_{11}(z), Q_{12}(z), Q_{22}(z), Q_{44}(z), Q_{55}(z), Q_{66}(z)$: Các hằng số độ cứng của vật liệu Composite gia cường CNT đồng phương đồng trục.

+ $\bar{Q}_{11}(z), \bar{Q}_{55}(z)$: Các hằng số độ cứng của vật liệu Composite gia cường CNT đồng phương lệch trục.

+ θ_k : Góc nghiêng của CNT lớp thứ k so với trục chính của vật liệu.

Trường chuyển vị của dầm composite lớp gia cường CNT theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao [2]:

$$U(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0(x, t)}{\partial x} + f(z) \phi_0(x, t); W(x, t) = w_0(x, t) \quad (14)$$

Trong đó:

+ $U(x, z, t)$: Chuyển vị dọc trục x tại vị trí cách trục trung hòa 1 khoảng z;

+ $W(x, t)$: Chuyển vị của mặt cắt theo chiều trục z;

+ $u_0(x, t)$: Chuyển vị dọc trục x tại vị trí trục trung hòa;

+ $\phi_0(x, t)$: Chuyển vị góc xoay quanh trục y của mặt cắt;

+ $f(z) = z - \frac{4}{3} \frac{z^3}{h^2}$: Hàm biến dạng cắt.

Đặt: $\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x}$; $\kappa_x^b = -\frac{\partial^2 w_0(x, t)}{\partial x^2}$; $\kappa_x^s = \frac{\partial \phi_0(x, t)}{\partial x}$; $\gamma_{xz}^0 = \phi_0(x, t)$, trường biến dạng của dầm:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z \kappa_x^b + f(z) \kappa_x^s; \gamma_{xz} = g(z) \gamma_{xz}^0 \quad (15)$$

Năng lượng biến dạng của dầm được xác định như (16):

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[b \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \left[\bar{Q}_{11}(z) (u_{0,x} - z w_{0,xx} + f(z) \phi_{0,x})^2 + \bar{Q}_{55}(z) g^2(z) \phi_0^2 \right] dz \right] dx \quad (16)$$

Đặt: $(A, B, D, B^s, D^s, H^s) = b \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{11} [1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)] dz$; $A^s = b \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\bar{Q}_{55})_k g^2(z) dz$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[A (u_{0,x})^2 + D (w_{0,xx})^2 + H^s (\phi_{0,x})^2 - 2B w_{0,xx} u_{0,x} - 2D^s w_{0,xx} \phi_{0,x} + 2B^s u_{0,x} \phi_{0,x} + A^s \phi_0^2 \right] dx \quad (17)$$

Với K là hệ số nền và b là bề rộng của dầm. Thế năng biến dạng của nền được xác định như (18):

$$\Pi_f = \frac{1}{2} b \int_0^L K (w_o)^2 dx \quad (18)$$

Động năng của hệ:

$$T = \frac{1}{2} \iiint_V \rho(z) \left\{ \dot{u}_0^2 + z^2 [\dot{w}_{0,x}]^2 + f^2(z) [\dot{\phi}_0]^2 - 2z \dot{u}_0 \dot{w}_{0,x} + 2f(z) \dot{u}_0 \dot{\phi}_0 - 2zf(z) \dot{w}_{0,x} \dot{\phi}_0 + (\dot{w}_0)^2 \right\} dV \quad (19)$$

Đặt $(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) [1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)] b dz$, thay vào (19):

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ I_1 [\dot{u}_0]^2 + I_3 [\dot{w}_{0,x}]^2 + I_6 [\dot{\phi}_0]^2 - 2I_2 \dot{u}_0 \dot{w}_{0,x} + 2I_4 \dot{u}_0 \dot{\phi}_0 - 2I_5 \dot{w}_{0,x} \dot{\phi}_0 + I_1 (\dot{w}_0)^2 \right\} dx \quad (20)$$

Tổng năng lượng của dầm được xác định theo phương trình (21):

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^L \left[A(u_{0,x})^2 + D(w_{0,xx})^2 + H^s(\phi_{0,x})^2 - 2Bw_{0,xx}u_{0,x} - 2D^s w_{0,xx}\phi_{0,x} + 2B^s u_{0,x}\phi_{0,x} + A^s \phi_0^2 \right] dx \\ & + \frac{1}{2} b \int_0^L K(w_0)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ I_1 [\dot{u}_0]^2 + I_3 [\dot{w}_{0,x}]^2 + I_6 [\dot{\phi}_0]^2 - 2I_2 \dot{u}_0 \dot{w}_{0,x} + 2I_4 \dot{u}_0 \dot{\phi}_0 - 2I_5 \dot{w}_{0,x} \dot{\phi}_0 + I_1 (\dot{w}_0)^2 \right\} dx \end{aligned} \quad (21)$$

Sử dụng phương pháp Ritz, trường chuyển vị được giả sử như (22) với các chuyển vị xác định $u_{0,j}, w_{0,j}, \phi_{0,j}$ và các hàm phụ thuộc vào liên kết hai đầu thanh $\theta_j(x)$, $\theta_{j,x}(x)$ là đạo hàm theo biến x của hàm $\theta_j(x)$, ω tần số dao động tự do của dầm:

$$u_0(x, t) = \sum_{j=1}^n \theta_{j,x}(x) u_{0,j} e^{i\omega t}; w_0(x, t) = \sum_{j=1}^n \theta_j(x) w_{0,j} e^{i\omega t}; \phi_0(x, t) = \sum_{j=1}^n \theta_{j,x}(x) \phi_{0,j} e^{i\omega t} \quad (22)$$

Sử dụng phương trình Lagrang – II (23) thay biểu thức (22) vào phương trình (23) thu được hệ phương trình chủ đạo của bài toán như (24).

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{p}_j} = 0 \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} K^{11} & K^{12} & K^{13} \\ [K^{12}]^T & K^{22} & K^{23} \\ [K^{13}]^T & [K^{23}]^T & K^{33} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M^{11} & M^{12} & M^{13} \\ [M^{12}]^T & M^{22} & M^{23} \\ [M^{13}]^T & [M^{23}]^T & M^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} K_{ij}^{11} &= A \int_0^L \theta_{i,xx} \theta_{j,xx} dx; K_{ij}^{12} = -B \int_0^L \theta_{i,xx} \theta_{j,xx} dx; K_{ij}^{13} = B^s \int_0^L \theta_{i,xx} \theta_{j,xx} dx; K_{ij}^{22} = D \int_0^L \theta_{i,xx} \theta_{j,xx} dx + K \int_0^L \theta_i \theta_j dx; \\ K_{ij}^{23} &= -D^s \int_0^L \theta_{i,xx} \theta_{j,xx} dx; K_{ij}^{23} = H^s \int_0^L \theta_{i,xx} \theta_{j,xx} dx + A^s \int_0^L \theta_{i,x} \theta_{j,x} dx; M_{ij}^{11} = I_1 \int_0^L \theta_{i,x} \theta_{j,x} dx; M_{ij}^{12} = -I_2 \int_0^L \theta_{i,x} \theta_{j,x} dx; \\ M_{ij}^{13} &= I_3 \int_0^L \theta_{i,x} \theta_{j,x} dx; M_{ij}^{22} = I_3 \int_0^L \theta_{i,x} \theta_{j,x} dx + I_1 \int_0^L \theta_i \theta_j dx; M_{ij}^{23} = -I_5 \int_0^L \theta_{i,x} \theta_{j,x} dx; M_{ij}^{33} = I_6 \int_0^L \theta_{i,x} \theta_{j,x} dx \end{aligned}$$

3. Kết quả tính toán và thảo luận

Bài toán 1: Khảo sát sự hội tụ của phương pháp

Xét dầm composite gia cường ống Nano Carbon trên nền đàn hồi có các thông số đầu vào: $L/h = 15$, các thông số về vật liệu nền và vật liệu CNT được lấy theo [10]. Để kiểm tra độ hội tụ của lời giải, chuỗi xấp xỉ chuyển vị được giả sử có tổng hàm được thay đổi từ 2 đến 10, kết quả thể hiện như Bảng 1. Nhận thấy rằng khi $n = 10$ kết quả tần số dao động tự do hội tụ cho tất cả các loại liên kết. Vì vậy trong các phân phân tích sau chọn chuỗi xấp xỉ với $n = 10$.

Bảng 1. Khảo sát sự hội tụ của lời giải theo phương pháp Ritz

Điều kiện biên	n = 2	n = 4	n = 6	n = 8	n = 10
H – H(Tựa đơn – Tựa đơn)	1,2135	1,2013	1,1978	1,1977	1,1977
C – H (Ngàm – Tựa đơn)	1,6754	1,6359	1,6332	1,6328	1,6328
C – F (Ngàm – Tự do)	0,4649	0,4583	0,4576	0,4575	0,4575
C – C (Ngàm – Ngàm)	2,0656	2,0031	1,9849	1,9784	1,9784

Bài toán 2: Kiểm chứng kết quả tính toán

Xét dầm FGM-CNT 4 lớp $[\theta / -\theta / -\theta / \theta]$ có thông số đầu vào: $L/h = 15$. Kết quả tính toán tần số dao động tự do của bài báo được đối chiếu so sánh với các kết quả được công bố

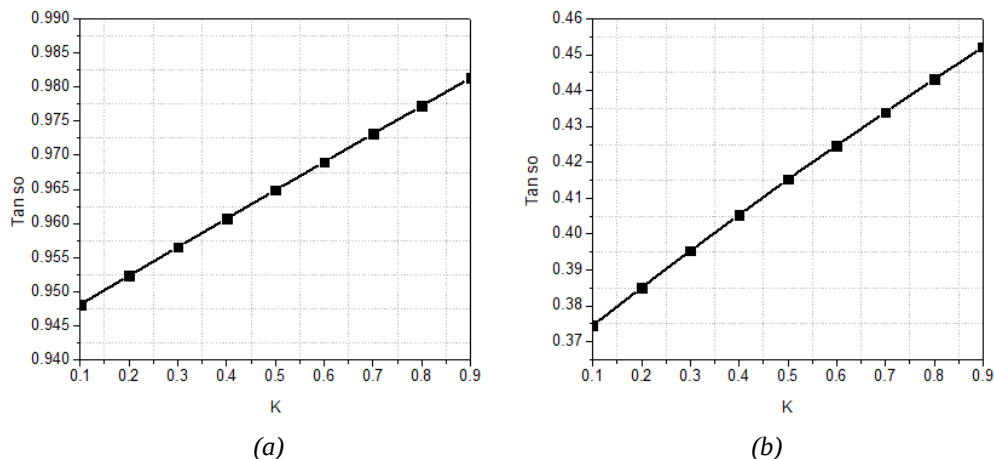
trong tài liệu [10] thể hiện trong Bảng 2. Nhận thấy tất cả các sai số đều dưới 4% đây là sai số chấp nhận được.

Bảng 2. So sánh kết quả tính toán của bài báo với kết quả tính toán trong [10]

Điều kiện biên	Phương pháp	Tần số dao động						
		0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
CH	FEM, [10]	1,2426	1,2021	1,0690	0,8250	0,5185	0,3305	0,3098
	Ritz, Bài báo	1,2699	1,2226	1,0723	0,8118	0,5026	0,3185	0,2976
	Sai số (%)	-2,20	-1,71	-0,31	1,60	3,07	3,63	3,94

Bài toán 3: Khảo sát ảnh hưởng của hệ số nền đến tần số dao động tự do của dầm FGM-CNT

Xét dầm FGM-CNT 4 lớp $[0^\circ / 0^\circ / 0^\circ / 0^\circ]$. Để khảo sát ảnh hưởng của độ cứng nền (K) đến tần số dao động tự do của dầm hệ số nền được thay đổi từ 0,1 – 0,9, tỷ lệ thể tích của CNT là 0,12 và kiểu phân bố FG-UD, kết quả thể hiện trong Hình 2. Thấy rằng tần số dao động tự do tăng khi hệ số nền tăng ở tất cả các kiểu liên kết H-H và C-F. Quan hệ giữa tần số dao động tự do của dầm FGM-CNT với hệ số nền gần như là tuyến tính.

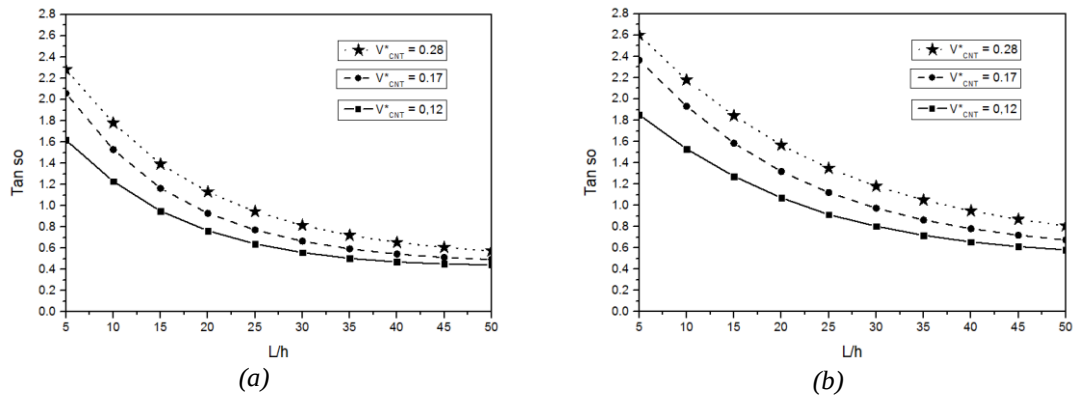


Hình 2. Ảnh hưởng của hệ số nền đến tần số dao động tự do của dầm FGM-CNT:
(a) Dầm có kiểu liên kết H-H, (b) Dầm có kiểu liên kết C-F

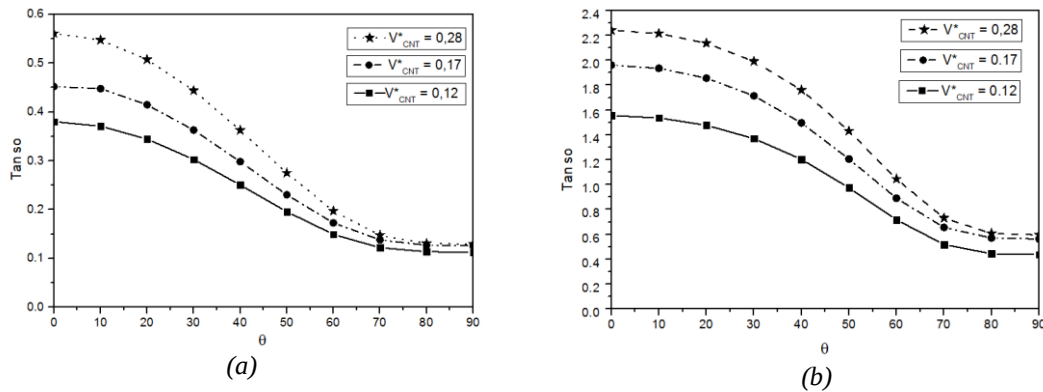
Bài toán 4: Khảo sát ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích của sợi CNT và góc nghiêng của sợi CNT đến tần số dao động tự do của dầm Composite lớp gia cường CNT trên nền đàn hồi

Để khảo sát ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích của vật liệu CNT đến tần số dao động tự do của dầm FGM-CNT nhóm tác giả khảo sát tỷ lệ thể tích của CNT tương ứng với 3 trường hợp: 0,12, 0,17 và 0,28 cho kiểu phân bố FG-UD tương ứng với 2 kiểu liên kết H-H và C-H, kết quả thể hiện trong Hình 3. Ảnh hưởng của góc nghiêng CNT đến tần số dao động tự do của dầm được khảo sát bằng cách cho góc nghiêng của CNT thay đổi từ 0° - 90° cho kiểu phân bố FG-X tương ứng với 2 kiểu liên kết C-F và C-C, kết quả thể hiện trong Hình 4.

Hình 3 và Hình 4 cho thấy: Khi dầm có tỷ lệ thể tích CNT tăng thì tần số dao động tự do của dầm cũng tăng là do khối lượng riêng của CNT nhỏ hơn rất nhiều so với khối lượng riêng của vật liệu nền. Vì vậy khi tỷ lệ thể tích CNT tăng làm cho khối lượng riêng của dầm giảm dẫn đến tần số dao động tự do tăng. Đồng thời cũng nhận thấy rằng tần số dao động tự do của dầm giảm khi tỷ lệ giữa chiều dài nhịp và chiều cao tăng hoặc góc nghiêng của sợi CNT tăng. Điều này là do độ cứng của dầm tỷ lệ nghịch với tỷ lệ giữa chiều dài nhịp và chiều cao tăng hoặc góc nghiêng của sợi CNT. Khi các yếu tố này tăng thì độ cứng của hệ giao động lại giảm dẫn đến tần số dao động giảm.



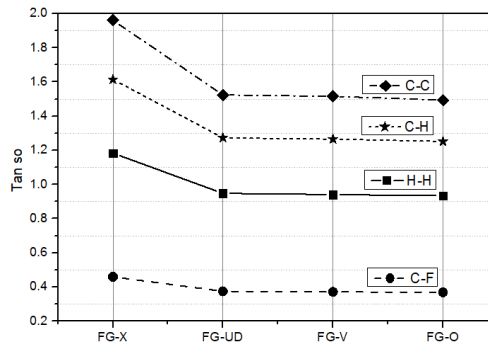
Hình 3. Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích V^*_{CNT} đến tần số dao động tự do của dầm:
(a) Dầm có kiểu liên kết H-H, (b) dầm có kiểu liên kết C-H



Hình 4. Ảnh hưởng của góc nghiêng sợi đến tần số dao động tự do của dầm:
(a) Dầm có kiểu liên kết C-F, (b) dầm có kiểu liên kết C-C

Bài toán 5: Khảo sát ảnh hưởng của điều kiện biên đến tần số dao động tự do

Để khảo sát ảnh hưởng của điều kiện biên đến tần số dao động tự do, nhóm tác giả khảo sát cho 4 kiểu phân bố CNT: FG-X, FG-UD, FG-V, FG-O, tương ứng với 4 kiểu liên kết H-H, C-H, C-F, C-C, trong trường hợp tỷ lệ thể tích CNT bằng 0,12. Kết quả được thể hiện như trong Hình 5, dầm 2 đầu liên kết ngàm C-C có độ cứng lớn nhất tương ứng với dầm có tần số dao động lớn nhất, dầm một đầu là liên kết ngàm 1 đầu tự do có độ cứng nhỏ nhất tương ứng dầm có tần số dao động nhỏ nhất. Đồng thời cũng nhận thấy dầm có CNT phân bố dạng FG-X có tần số dao động tự do lớn nhất và dầm có kiểu phân bố dạng FG-O có tần số dao động tự do nhỏ nhất.



Hình 5. Ảnh hưởng của liên kết và kiểu phân bố CNT đến tần số dao động tự do của dầm FGM-CNT trên nền đàn hồi

4. Kết luận

Bài báo đã phát triển thành công phương pháp Ritz để phân tích dao động tự do của dầm FGM-CNT trên nền đàn hồi sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao để phân tích. Kết quả tính toán bằng phương pháp đề xuất được so sánh với công bố trước để kiểm tra sự phù hợp và tính chính xác của phương pháp đề xuất. Ảnh hưởng của hệ số nền đàn hồi đến tần số dao động tự do của dầm FGM-CNT gần như tuyến tính. Ảnh hưởng của các tính chất của vật liệu CNT đến tần số dao động tự do của dầm FGM-CNT là tương đối rõ ràng: Khi tỷ lệ thể tích của CNT tăng thì tần số dao động của dầm CNT tăng, khi góc nghiêng của CNT tăng thì tần số dao động của dầm FGM-CNT giảm. Trong tất cả các kiểu phân bố của CNT thì dầm kiểu phân bố dạng FG-X có độ cứng lớn nhất và trong tất cả các kiểu liên kết thì dầm có liên kết ngàm ở 2 đầu cũng có độ cứng lớn nhất. Điều này dẫn đến dầm FGM-CNT có tần số dao động tự do lớn nhất so với các trường hợp kiểu phân bố CNT khác hoặc các dạng liên kết khác.

Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Giao thông vận tải (ĐH GTVT) trong đề tài mã số T2023-PHII_CT-002.

TÀI LIỆU THAM KHẢO/REFERENCES

- [1] H. S. Shen and C. L. Zhang, "Thermal buckling and postbuckling behavior of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates," *Materials & Design*, vol. 31, no. 7, pp. 3403-3411, 2010.
- [2] J. N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC press, 2003.
- [3] S. Kamarian, M. Shakeri, M. H. Yas, M. Bodaghi, and A. Pourasghar, "Free vibration analysis of functionally graded nanocomposite sandwich beams resting on Pasternak foundation by considering the agglomeration effect of CNTs," *Journal of Sandwich Structures & Materials*, vol. 17, no. 6, pp. 632-665, 2015.
- [4] H. S. Shen and Y. Xiang, "Nonlinear analysis of nanotube-reinforced composite beams resting on elastic foundations in thermal environments," *Engineering Structures*, vol. 56, pp. 698-708, 2013.
- [5] N. Wattanasakulpong and V. Ungbhakorn, "Analytical solutions for bending, buckling and vibration responses of carbon nanotube-reinforced composite beams resting on elastic foundation," *Computational Materials Science*, vol. 71, pp. 201-208, 2013.
- [6] J. Yang, X. H. Huang, and H. S. Shen, "Nonlinear flexural behavior of temperature-dependent FG-CNTRC laminated beams with negative Poisson's ratio resting on the Pasternak foundation," *Engineering Structures*, vol. 207, 2020, Art. no. 110250.
- [7] M. Rafiee, J. Yang, and S. Kitipornchai, "Thermal bifurcation buckling of piezoelectric carbon nanotube reinforced composite beams," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 66, no. 7, pp. 1147-1160, 2013.
- [8] H. Asadi and A. R. Beheshti, "On the nonlinear dynamic responses of FG-CNTRC beams exposed to aerothermal loads using third-order piston theory," *Acta Mechanica*, vol. 229, pp. 2413-2430, 2018.
- [9] F. Lin and Y. Xiang, "Vibration of carbon nanotube reinforced composite beams based on the first and third order beam theories," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 38, no. 15-16, pp. 3741-3754, 2014.
- [10] D. T. Vo, H. V. Ho, and T. T. Nguyen, "Free vibration analysis of laminated FG-CNT reinforced composite beams using finite element method," *Frontiers of Structural and Civil Engineering*, vol. 13, pp. 324-336, 2019.