

ỨNG DỤNG PHẦN MỀM MATHEMATICA ĐỂ MÔ PHỎNG CÁC DAO ĐỘNG VÀ TÌM HIỂU Ý NGHĨA VẬT LÝ CỦA NGHIỆM CÁC PHƯƠNG TRÌNH SỐNG

Nguyễn Hồng Linh*, Nguyễn Hải Yến
Trường Đại học Sư phạm – ĐH Thái Nguyên

TÓM TẮT

Dao động của sợi dây gắn chặt tại hai đầu mút và của màng với biên gắn chặt được mô phỏng và phân tích ý nghĩa vật lý bằng cách sử dụng phần mềm Wolfram Mathematica (WM). Kết quả cho thấy rằng hình ảnh động trong mô phỏng được thực hiện qua các code chương trình WM có thể giúp người học dễ dàng quan sát và hiểu được các ý nghĩa vật lý của bài toán. Các kết quả mô phỏng cũng chỉ ra khả năng ứng dụng WM trong nghiên cứu và giảng dạy.

Từ khóa: Ngôn ngữ lập trình, dao động, sóng, dây, màng, đồ thị, mô phỏng.

MỞ ĐẦU

Khi nghiên cứu các dao động bằng phương pháp toán học, ta phải giải các phương trình sóng. Trong kết quả, các hàm mô tả dao động thường được cho bằng biểu thức toán học khá phức tạp. Chẳng hạn, khi xét dao động tự do của sợi dây gắn chặt tại hai đầu mút, giải phương trình sóng một chiều ta thu được nghiệm có dạng như sau [6], [7], [8]:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi t}{L} + b_k \sin \frac{k\pi t}{L} \right) \sin \frac{k\pi x}{L}$$

Có thể thấy, từ các hàm này, rất khó có thể hình dung được sợi dây dao động như thế nào. Nếu chỉ sử dụng các phương pháp truyền thống để vẽ dạng sợi dây ở các thời điểm khác nhau thì tốn rất nhiều thời gian mà kết quả thu được rất hạn chế, thiếu chính xác.

Nhằm giải quyết những tồn tại nêu trên, đồng thời cũng là góp phần hưởng ứng chủ trương “Tăng cường ứng dụng công nghệ thông tin trong giáo dục – đào tạo” của Đảng và Chính phủ, trong bài báo này, chúng tôi xin chia sẻ cách dùng phần mềm Wolfram Mathematica (WM) để mô phỏng các dao động và tìm hiểu ý nghĩa vật lý của chúng.

PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Có một số phần mềm có thể đáp ứng được những yêu cầu đặt ra trên đây nhưng chúng tôi chọn WM vì nhận thấy WM có nhiều tính năng giúp giải tốt quyết vấn đề đặt ra [1], [2], [3], [4].

Sau đây chúng tôi xin trình bày một số cấu trúc lệnh của WM qua các ví dụ cụ thể [4].

Ví dụ 1: Để nhập các hàm

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2} + \sin x,$$

$$u_k(x,t) = \left(a_k \cos \frac{k\pi t}{L} + b_k \sin \frac{k\pi t}{L} \right) \sin \frac{k\pi x}{L},$$

$$\text{ta viết: } f[x_] := \sqrt{4 - x^2} + \text{Sin}[x]$$

$$uk[x_,t_] := (ak * \text{Cos}[k * \text{Pi} * t / L] + bk * \text{Sin}[k * \text{Pi} * t / L]) * \text{Sin}[k * \text{Pi} * x / L]$$

Ví dụ 2: Để tính tích phân hàm $f(x) = x \sin x$ trên đoạn $[0, \pi]$, ta viết:

$$\text{Integrate}[x * \text{Sin}[x], \{x, 0, \text{Pi}\}]$$

Ví dụ 3: Để vẽ đồ thị hàm $f(x) = x \sin x$ trên đoạn $[-\pi, \pi]$ ta viết: **Plot** $[x * \text{Sin}[x], \{x, -\text{Pi}, \text{Pi}\}]$

Ví dụ 4: Để tính tổng 26 số hạng $u_k(x,t) (k=1,2,3,\dots)$ đã nhập ở ví dụ 1, ta viết:

$$\text{Sum}[uk[x,t], \{k, 1, 26\}]$$

Ví dụ 5: Để lập dãy 101 điểm thuộc đồ thị hàm $f(x) = \sin x$ có hoành độ dạng $k\pi \cdot 0,01$, ta viết:

$$\text{Table}[\{k * \text{Pi} * 0.01, \text{Sin}[k * \text{Pi} * 0.01]\}, \{k, 0, 100\}]$$

Ví dụ 6: Để tạo hình ảnh động mô phỏng dao động của dây trên đoạn $[0, \pi]$ trong khoảng thời gian từ $t_1 = 0$ đến $t_2 = 8$ biết phương trình dao động là $u(x,t) = \sin t \cdot \sin x$, ta viết:

$$\text{Animate}[\text{Plot}[\text{Sin}[x] * \text{Sin}[t], \{x, 0, \text{Pi}\}], \{t, 0, 8, 0.01\}]$$

* Tel: 0985 290862, Email: honglinhkhaoalyspntn@gmail.com

KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

Mô phỏng và tìm hiểu dao động tự do của dây hữu hạn có hai mút gắn chặt

Bài toán 1. Xét dao động tự do của dây hữu hạn, gắn chặt tại hai mút $x = 0$, $x = L$, biết độ lệch ban đầu là $f(x)$, vận tốc ban đầu là $F(x)$ [6,7,8].

Dùng phương pháp toán học, ta thu được nghiệm như sau [6,7,8]:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi t}{L} + b_k \sin \frac{k\pi t}{L} \right) \sin \frac{k\pi x}{L} \quad (1)$$

trong đó

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx; \quad b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^L F(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx. \quad (2)$$

Chương trình Code 1 mô phỏng dao động của dây hữu hạn có hai mút gắn chặt

Ta dùng WM lập chương trình mô phỏng dao động của dây trong bài toán 1 với các kết quả (1), (2) và các điều kiện cụ thể như sau:

$$a = 1; h = 0,1; L = 2;$$

$$f(x) = 4hx(L-x)/L^2, (0 \leq x \leq L);$$

$$F(x) = 0; [6,7,8]$$

Clear[a,L,k,n,h,x,t,u,i,bk,ak,uk]

$$a=1; L=2; h=0.1; n=128; f[x_]:=4*h*x*(L-x)/L^2; F[x_]=0;$$

$$ak=(2/L)*\text{Integrate}[f[x]*\text{Sin}[k*Pi*x/L],[x,0,L]];$$

$$bk=(2/k*Pi*a)*\text{Integrate}[F[x]*\text{Sin}[k*Pi*x/L],[x,0,L]];$$

$$uk[x_,t_,k_]= (ak* \text{Cos}[k*Pi*a*t/L]+ bk*\text{Sin}[k*Pi*a*t/L])* \text{Sin}[k*Pi*x/L];$$

$$\text{Animate}[\text{Plot}[\{uk[x,t,3],0.005,0.005\},\{x,0,L\}],\{t,0,8,0.1\}]$$

$$u[x_,t_]=\text{Sum}[uk[x,t,k],\{k,1,n\}];$$

$$h1=\text{Table}[\text{Plot}[\{u[x,t],-h,h\},\{x,0,L\}],\{t,0,8,0.1\}];$$

$$d1=\{h1[[1]],h1[[6]],h1[[16]],h1[[21]]\}$$

$$\text{Animate}[h1[[i]],\{i,1,81,1\}]$$

$$h2=\text{Table}[\{0.02*i,u[0.02*i,t]\},\{i,0,100\}];$$

$$\text{Animate}[\text{ListPlot}[\%,\text{PlotRange}\rightarrow\{\{0,2\},\{-h,h\}\},\text{Gridlines}\rightarrow\text{Automatic}],\{t,0,8,0.1\}]$$

$$\text{Plot}[\{u[0.3,t],u[1,t],u[1.5,t]\},\{t,0,12\},\text{GridLines}\rightarrow\text{Automatic}]$$

Các kết quả thu được khi chạy chương trình Code 1

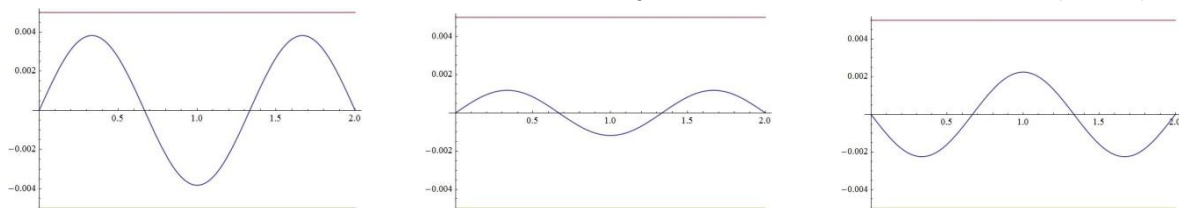
- Hình ảnh động: mô phỏng dao động của dây, của nhiều điểm trên dây (hình 2), của hàm riêng $u_k(x,t)$ (chọn $k = 3$) với

$$u_k(x,t) = \left(a_k \cos \frac{k\pi t}{L} + b_k \sin \frac{k\pi t}{L} \right) \sin \frac{k\pi x}{L}$$

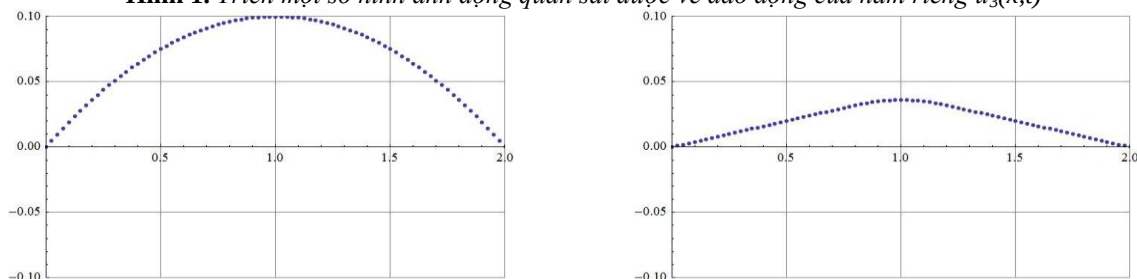
(hình 1).

- Dạng sợi dây tại các thời điểm ta tùy chọn: $t_1 = 0$; $t_2 = 0,5$; $t_3 = 1,5$; $t_4 = 2$ (hình 3).

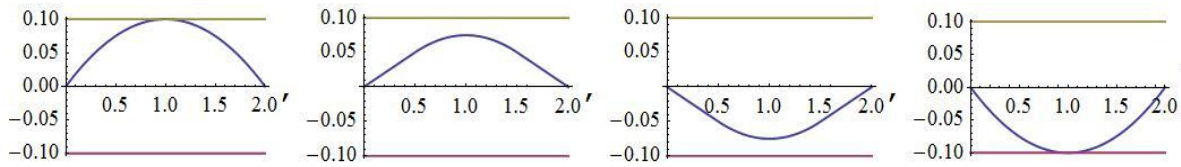
- Đồ thị dao động theo thời gian của các điểm tùy chọn: $x = 0,3$; $x = 1$; $x = 1,5$ (hình 4).



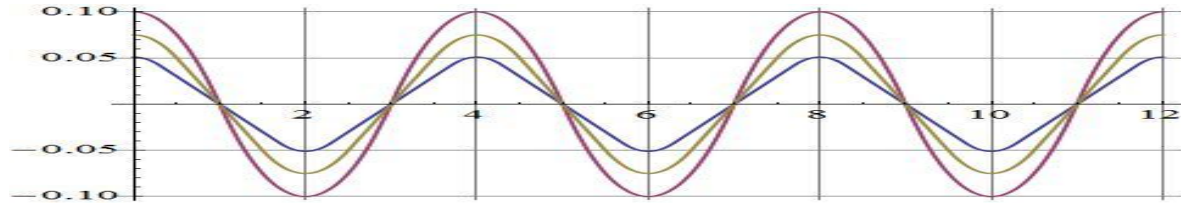
Hình 1. Trích một số hình ảnh động quan sát được về dao động của hàm riêng $u_3(x,t)$



Hình 2. Trích một số hình ảnh động quan sát được về dao động của nhiều điểm trên dây



Hình 3. Hình ảnh sợi dây lần lượt tại các thời điểm: $t_1 = 0$; $t_2 = 0,5$; $t_3 = 1,5$; $t_4 = 2$.



Hình 4. Đồ thị dao động theo thời gian của các điểm $x_2 = 1$ (đường sin có biên độ lớn nhất); $x = 0,3$ (đường sin có biên độ nhỏ nhất); $x = 1,5$

Kết luận vật lý rút ra được đối với dao động tự do của dây có hai mút gắn chặt

Mọi điểm trên dây (trừ hai mút) đều dao động điều hòa với cùng pha, cùng tần số nhưng biên độ phụ thuộc vào hoành độ x của chúng. Các điểm này cùng một lúc đạt độ lệch cực đại và cùng một lúc đi qua vị trí cân bằng. Dao động của các hàm riêng, dây có dạng sóng dừng.

Bằng phương pháp toán học, ta thu được nghiệm của bài toán như sau [5], [6], [8]:

$$u(x,y,t) = \frac{64AL^4}{\pi^6} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x}{L} \cdot \sin \frac{(2m+1)\pi y}{L}}{(2n+1)^3 (2m+1)^3} \cdot \cos(\sqrt{(2n+1)^2 + (2m+1)^2} \cdot \frac{\pi a t}{L}) \quad (3)$$

Chương trình code 2 mô phỏng dao động tự do của màng có biên gắn chặt

Ta dùng WM để lập chương trình mô phỏng dao động của màng cho bởi (3), trong đó ta cho các hằng số các giá trị cụ thể như sau:

$$L=1; a=1; h = \frac{64AL^4}{\pi^6} = \frac{1}{30}.$$

```
Clear[L,k,m,n,x,y,t,u,umn,h1,h2,i,p,q,s,d1,d2]
L=1;h=1/30;p=2*n+1;q=2*m+1;k=(p^2+q^2)^1/2;
s=p^3*q^3;
```

```
umn[x_,y_,t_]=(h/s)*Sin[p*Pi*x/L]*
Sin[(q*Pi*y/L)*Cos[k*Pi*t/L];
u[x_,y_,t_]=Sum[umn[x,y,t],{n,0,5},{m,0,5}];
h1=Table[Plot3D[u[x,y,t],{x,0,1},{y,0,1},PlotRange->{-0.035,0.035}],{t,0,6,0.1}];
```

```
d1={h1[[1]],h1[[3]],h1[[10]],h1[[12]]}
```

Mô phỏng dao động tự do của màng có biên gắn chặt

Bài toán 2

Ở thời điểm ban đầu $t = 0$, một màng vuông cạnh L có dạng $u(x,y,0) = Axy(L-x)(L-y)$, ($A = \text{const}$). Màng dao động không có vận tốc ban đầu. Hãy nghiên cứu dao động tự do của màng gắn chặt theo chu tuyến [5], [6], [8].

```
Animate[h1[i],{i,1,61,1}]
```

```
h2=Table[Plot[u[0.5,y,t],{y,0,1},
PlotRange->{-0.035,0.035}],{t,0,6,0.1}];
d2={h2[[1]],h2[[3]],h2[[6]],h2[[8]]}
```

```
Animate[h2[i],{i,1,61,1}]
```

```
Animate[Plot3D[(h/3^6)*Sin[3*Pi*x/L]*
Sin[3*Pi*y/L]*Cos[3*sqrt(2)*Pi*t/L],
{x,0,1},{y,0,1},PlotRange->{-0.035,0.035}],
{t,0,6,0.1}]
```

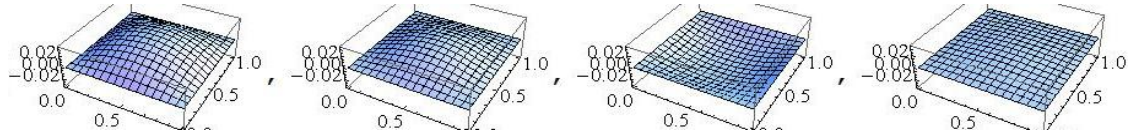
```
Plot[{u[0.2,0.5,t],u[0.3,0.5,t],u[0.5,0.5,t]},{t,0,8}]
```

Các kết quả thu được khi chạy chương trình code 2

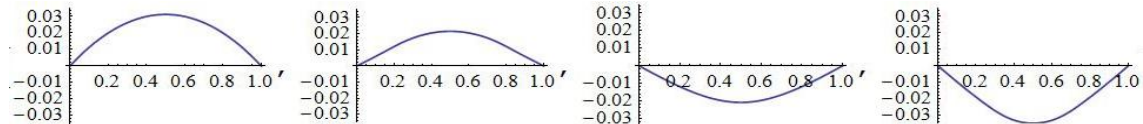
- Hình ảnh của màng tại các thời điểm $t_1 = 0$, $t_2 = 2$, $t_3 = 9$, $t_4 = 11$ (Hình 5).

- Dạng của đường $x = 0,5$ tại các thời điểm $t_1 = 0$, $t_2 = 2$, $t_3 = 5$, $t_4 = 7$ (Hình 6).

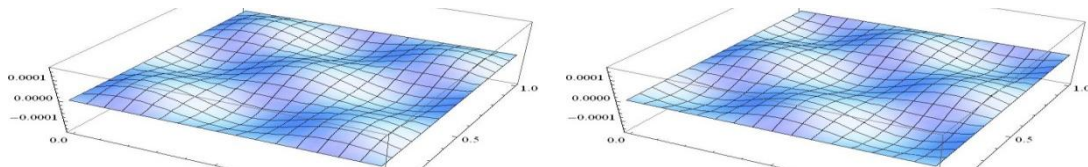
- Hình ảnh động: mô phỏng dao động của màng, của đường $x = 0,5$, của hàm riêng $u_{11} = (h/3^6)\sin(3\pi x/L)\sin(3\pi y/L)\cos(3\sqrt{2}\pi t/L)$, (quan sát trên màn hình và hình 7).
- Đồ thị biểu diễn dao động của các điểm $(0,2;0,5)$, $(0,3;0,5)$, $(0,5;0,5)$ (Hình 8).



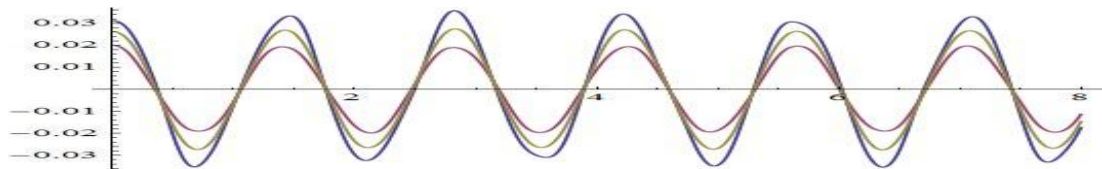
Hình 5. Hình ảnh của màng lần lượt tại các thời điểm $t_1 = 0, t_2 = 2, t_3 = 9, t_4 = 11$



Hình 6. Dạng của đường $x = 0,5$ trên màng tại các thời điểm $t_1 = 0, t_2 = 2, t_3 = 5, t_4 = 7$



Hình 7. Trích một số hình ảnh động quan sát được về dao động của hàm riêng $u_{11}(x,t)$



Hình 8. Đồ thị dao động theo thời gian của các điểm $(0,2;0,5)$ (đường sin có biên độ bé nhất), $(0,5;0,5)$ (đường sin có biên độ lớn nhất), $(0,3;0,5)$ (đường còn lại)

Kết luận vật lý rút ra được đối với dao động tự do của màng có biên gắn chặt

Mọi điểm trên màng (trừ các điểm biên) đều dao động điều hòa với cùng pha, cùng tần số nhưng biên độ phụ thuộc vào tọa độ (x, y) của chúng. Các điểm này cùng một lúc đạt độ lệch cực đại và cùng một lúc đi qua vị trí cân bằng. Dao động của màng có dạng sóng dừng.

KẾT LUẬN

Trong bài báo này, dao động tự do của sợi dây có hai đầu mút gắn chặt và dao động tự do của màng với các biên gắn chặt đã được chúng tôi mô phỏng và phân tích ý nghĩa vật lý bằng cách sử dụng phần mềm WM. Chúng tôi đã thực hiện mô phỏng thành công hình ảnh động của hai bài toán trên. Kết quả mô phỏng cho thấy hình ảnh động khá sát với thực tế, giúp người học dễ dàng quan sát và hiểu được các ý nghĩa vật lý của bài toán. Hơn nữa, thông qua quá trình phân tích hình ảnh động, chúng tôi đã phát hiện khả năng

ứng dụng được của phần mềm WM trong tiến trình dạy học và nghiên cứu.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Won Young Yang, Wenwu Cao, Tae-Sang Chung (2005), *Applied Numerical Methods Using MATLAB*, Printed in the United States of America.
2. Dương Thuỳ Vỹ (2011), *Giáo trình phương pháp tính*, Nxb Khoa học kỹ thuật.
3. Lê Trọng Vinh, Trần Minh Toàn (2013), *Giáo trình phương pháp tính và Matlab*, Nxb Đại học Bách khoa Hà Nội.
4. Nguyễn Chính Cường (Chủ biên) (2011), Nguyễn Trọng Dũng, *Giáo trình tin học ứng dụng*, Nxb ĐHP Hà Nội.
5. Nguyễn Chính Cường (2011), *Bài tập phương pháp toán lý*, Nxb Đại học Sư phạm Hà Nội.
6. Đỗ Đình Thanh (2002), *Phương Pháp toán lý*, Nxb Giáo dục.
7. Nguyễn Đình Trí, Nguyễn Trọng Thái (1971) *Phương trình vật lý cho toán*, Nxb ĐH và THCNHN.
8. Phan Huy Thiện (2008), *Tuyển tập bài tập phương trình toán lý*, Nxb Giáo dục.

SUMMARY

**APPLICATION OF WOLFRAM MATHEMATICA SOFTWARE
TO SIMULATE OSCILLATION AND FIND THE PHYSICAL MEANING
OF WAVE EQUATION SOLUTION**

Nguyen Hong Linh^{*}, Nguyen Hai Yen
University of Education - TNU

The oscillation of the strands attached at both ends and of the bound membrane was simulated and analyzed using the Wolfram Mathematica (WM) software. The results show that animations in simulation performed through the WM program code can help the learner to easily observe and understand the physical meaning of the problem. The simulation results also show the applicability of WM in research and teaching.

Keywords: *programming language, oscillation, wave, strings, membrane, graph, simulation.*

Ngày nhận bài: 11/4/2017; Ngày phản biện: 08/5/2017; Ngày duyệt đăng: 30/9/2017

^{*} Tel: 0985 290862, Email: honglinhkoalydhsptn@gmail.com