

OPTIMAL ALLOCATION OF SHUNT CAPACITORS IN ELECTRICAL DISTRIBUTION GRIDS CONSIDERING DAILY LOAD PATTERNS

Phan Xuan Giang, Pham Nang Van *

School of Electrical and Electronic Engineering - Hanoi University of Science and Technology

ARTICLE INFO		ABSTRACT
Received:	03/3/2025	This study presents a formulation based on second-order conic programming with integer variables to find the globally optimal solution for the problem of determining the location and size of shunt capacitors, considering the influence of daily load profiles. The objective function is to minimize the total annualized cost while satisfying constraints related to the power grid and capacitors. The proposed model originates from a nonlinear optimization approach with integer variables. The evaluation of the proposed optimization model is performed on the IEEE 33-bus system and the Vietnamese realistic 54-bus system with four scenarios using the GUROBI solver in the GAMS programming environment. The computational results show that the optimal location and capacity of the capacitors for these scenarios are different, with the total installed power for the scenario with merely residential loads being the greatest on both systems. Furthermore, the voltage profile on the grid varies significantly across the four scenarios. The cause of these results is due to the four scenarios having different shapes of the load curves, including differences in the total energy consumption, the ratio of maximum to minimum powers, and the average load power.
Revised:	25/5/2025	
Published:	26/5/2025	
KEYWORDS		
Power distribution systems		
Energy loss		
Shunt capacitors		
Daily load patterns		
Mixed-integer second-order cone programming		

LỰA CHỌN VỊ TRÍ VÀ CÔNG SUẤT TỐI ƯU CỦA TỤ BÙ NGANG TRONG LƯỚI ĐIỆN PHÂN PHỐI CÓ XÉT HÌNH DÁNG ĐỒ THỊ PHỤ TẢI

Phan Xuân Giang, Phạm Năng Văn *

Trường Điện – Điện tử - Đại học Bách khoa Hà Nội

THÔNG TIN BÀI BÁO		TÓM TẮT
Ngày nhận bài:	03/3/2025	Nghiên cứu này trình bày mô hình tối ưu nón bậc hai với biến nguyên để tìm lời giải tối ưu toàn cục của bài toán xác định vị trí đặt và công suất của tụ bù ngang có xét ảnh hưởng của đồ thị phụ tải ngày đêm. Hàm mục tiêu là tối thiểu hóa tổng chi phí hàng năm, đồng thời đảm bảo các ràng buộc về lưới điện và tụ bù ngang. Mô hình tối ưu đề xuất được biến đổi từ mô hình tối ưu phi tuyến với biến nguyên. Mô hình tối ưu đề xuất được đánh giá trên lưới điện 33 nút IEEE và 54 nút tại Việt Nam với bốn kịch bản sử dụng bộ giải GUROBI trong môi trường lập trình GAMS. Kết quả tối ưu cho thấy, vị trí đặt và công suất của tụ bù trong các kịch bản là khác nhau, trong đó tổng công suất đặt của kịch bản lưới điện chỉ có tải sinh hoạt là lớn nhất trên cả hai lưới điện. Ngoài ra, phân bố điện áp trong bốn kịch bản có sự khác biệt rõ rệt. Nguyên nhân của các kết quả trên là do bốn kịch bản có sự khác nhau về hình dáng đồ thị phụ tải, bao gồm sự khác nhau về tổng điện năng tiêu thụ, chênh lệch giữa công suất cực đại và cực tiểu và công suất trung bình của phụ tải.
Ngày hoàn thiện:	25/5/2025	
Ngày đăng:	26/5/2025	
TỪ KHÓA		
Mạng điện phân phối		
Tổn thất điện năng		
Tụ bù ngang		
Đồ thị phụ tải ngày đêm		
Quy hoạch nón bậc hai với số nguyên		

DOI: <https://doi.org/10.34238/tnu-jst.12198>

* Corresponding author. Email: van.phamnang@hust.edu.vn

1. Giới thiệu

Mạng điện phân phối trung áp và hạ áp thường có cấu trúc hình tia nhằm giảm chi phí đầu tư và đơn giản hóa sơ đồ bảo vệ [1]. Tuy nhiên, cấu trúc này lại làm tăng tổn thất năng lượng, kéo theo chi phí vận hành cao hơn và ảnh hưởng đến hiệu suất hệ thống. Vì vậy, bài toán giảm tổn thất năng lượng có ý nghĩa quan trọng trong mạng điện phân phối. Nhiều giải pháp đã được đề xuất trong nghiên cứu để giải quyết vấn đề này, bao gồm tái cấu trúc mạng điện và lắp đặt các thiết bị bù. Phương pháp phổ biến để tái cấu trúc mạng điện là xây dựng thêm các đường dây phân phối để tạo thành cấu trúc vận hành có tổn thất công suất nhỏ hơn [2]. Trường hợp tích hợp các thiết bị bù, chủ yếu là các nguồn điện năng lượng tái tạo [3], thiết bị lưu trữ điện năng dạng pin (BESS – Battery Energy Storage System) [4] và các tụ bù cố định. Tuy nhiên, nguồn điện năng lượng tái tạo và BESS có chi phí đầu tư cao, khó khăn khi thu hồi vốn và phải xem xét thêm nhiều yếu tố để tích hợp vào lưới điện. Vì vậy, lắp đặt tụ bù ngang thường được đánh giá là biện pháp đem lại hiệu quả cao trong việc giảm tổn thất năng lượng và nâng cao chất lượng điện áp trong lưới phân phối.

Bài toán tối ưu hóa vị trí đặt và công suất định mức của tụ điện bù ngang đã được trình bày trong một số nghiên cứu. Bài báo [5] giới thiệu một thuật toán heuristic hiệu quả để giải quyết vấn đề đặt tối ưu tụ bù trong mạng phân phối. Các kỹ thuật heuristic khác như giải thuật di truyền (GA – Genetic Algorithm) [6], tối ưu bầy đàn (PSO – Particle Swarm Optimization) [7] được đề xuất để phân bố tụ bù tối ưu nhằm giảm tổn thất năng lượng và nâng cao chất lượng điện áp của lưới điện. Nhược điểm của các phương pháp heuristic trong [6], [7] là thường chỉ tìm được lời giải tối ưu cục bộ. Các tác giả trong [8] đã đề xuất quy trình sử dụng thuật toán thụ phấn hoa (FPA – Flower Pollination Algorithm) để lựa chọn vị trí đặt của tụ bù cố định trong mạng điện phân phối hình tia để tổng chi phí về tổn hao điện năng trong một năm và chi phí đầu tư tụ bù đạt giá trị cực tiểu. Kết quả cho thấy rằng thuật toán này hiệu quả hơn so với các kỹ thuật phân tích độ nhạy và giải thuật di truyền cổ điển. Thuật toán hybrid PPSOGSA (Phasor Particle Swarm Optimization combined with Gravitational Search Algorithm) trong [9] được áp dụng để tính toán tối ưu vị trí đặt và công suất phản kháng của tụ bù nhằm tối thiểu hóa tổng tổn hao công suất tác dụng của mạng điện phân phối có tích hợp nguồn năng lượng phân tán (DG – Distributed Generator). Bài báo [10] đã xây dựng mô hình tối ưu dạng quy hoạch tuyến tính với biến nguyên (MILP – Mixed Integer Linear Programming) để tính toán tối ưu vị trí đặt và công suất định mức của tụ bù bằng cách áp dụng các biểu thức tuyến tính từng đoạn. Tuy nhiên, các biểu thức tuyến tính từng đoạn này được xấp xỉ và có thể gây ra sai số lớn khi bài toán tối ưu có các ràng buộc không tuyến tính bậc cao. Nghiên cứu [11] sử dụng phương pháp dựa trên tối ưu nón bậc hai với biến nguyên (MISOCP – Mixed Integer Second Order Conic Programming) để lựa chọn vị trí đặt và công suất của tụ điện bù ngang nhằm tối thiểu hóa tổn thất điện năng của mạng điện. Tuy nhiên, nghiên cứu này bỏ qua chi phí của tụ điện bù ngang trong hàm mục tiêu và không xét tác động của hình dáng đồ thị phụ tải. Bài báo [12] sử dụng phương pháp MISOCP để tính toán tối ưu vị trí và công suất của tụ điện bù ngang có xét sự thay đổi theo thời gian của công suất phụ tải. Tuy nhiên, bài báo này coi công suất định mức của tụ bù là các biến liên tục và không đánh giá ảnh hưởng của hình dáng đồ thị phụ tải đến lời giải tối ưu.

Các bài báo [5]-[12] cho thấy, bài toán tối ưu về lựa chọn vị trí đặt và dung lượng của tụ điện bù ngang thường được giải dựa trên các thuật toán heuristic, tối ưu MILP và MISOCP. Các thuật toán heuristic có thể giải được nhiều kiểu bài toán tối ưu có tính phi tuyến và biến nguyên. Tuy nhiên, nhược điểm chính của các thuật toán heuristic là không đảm bảo nghiệm tối ưu toàn cục và thời gian tính toán tăng đáng kể trên các lưới điện lớn. Phương pháp MILP có thể tìm được nghiệm tối ưu toàn cục. Tuy nhiên, phương pháp MILP chỉ có thể áp dụng để giải các bài toán tối ưu tuyến tính và lời giải có sai số do áp dụng các kỹ thuật xấp xỉ. Phương pháp MISOCP có thể tìm được nghiệm tối ưu toàn cục và không có sai số. Tuy nhiên, phương pháp MISOCP cũng chỉ có thể áp dụng để giải các bài toán tối ưu dạng nón bậc hai.

Ngoài ra, các nghiên cứu [5]-[12] coi công suất tụ bù là biến liên tục và chưa xét ảnh hưởng của đồ thị phụ tải đến lời giải tối ưu. Mục đích của bài báo này là xây dựng mô hình MISOCP để tìm

lời giải tối ưu toàn cục và chính xác của bài toán lựa chọn vị trí đặt và dung lượng tối ưu của tụ điện bù ngang. Mô hình MISOCP đề xuất có xét vốn đầu tư lắp đặt tụ bù ngang, mô hình công suất của tụ bù ngang là các biến rời rạc và sự tác động của hình dáng đồ thị phụ tải đến lời giải tối ưu. Các đóng góp chính của bài báo bao gồm:

- Đề xuất mô hình toán học tối ưu phi tuyến với biến nguyên (MINLP – Mixed Integer Nonlinear Programming) cho bài toán tối ưu hóa vị trí và dung lượng của tụ bù ngang trong lưới phân phối. Hàm mục tiêu là cực tiểu tổng chi phí quy về một năm, bao gồm vốn đầu tư tụ bù và chi phí tổn thất năng lượng hàng năm, và thỏa mãn các phương trình cân bằng công suất nút, ràng buộc giới hạn mô-đun điện áp tại các nút, ràng buộc giới hạn dòng điện trên các đường dây và các ràng buộc của tụ điện bù ngang.

- Xây dựng mô hình MISOCP từ mô hình MINLP sử dụng công thức nón toàn phương của các phương trình cân bằng công suất nút và phương pháp chính xác để tuyến tính hóa biểu thức tích của biến liên tục và biến nhị phân.

- Áp dụng mô hình MISOCP đề xuất để tính toán tối ưu vị trí đặt và công suất định mức của tụ điện bù ngang cho lưới điện 33 nút IEEE và lưới điện thực tế 54 nút tại Việt Nam với bốn kịch bản khác nhau của hình dáng đồ thị phụ tải ngày đêm.

Nội dung còn lại của bài báo gồm ba phần. Phần 2 mô tả về mô hình tối ưu MINLP và MISOCP của bài toán xác định vị trí đặt và công suất định mức tối ưu của tụ bù. Phần 3 trình bày các kết quả tối ưu tương ứng với bốn kịch bản trên lưới điện trung áp 33 nút IEEE và lưới điện thực tế 54 nút. Hiệu quả của mô hình tối ưu đề xuất cũng được so sánh với các nghiên cứu đã được công bố. Các kết luận và định hướng chủ đề nghiên cứu tiếp theo được mô tả trong phần 4.

2. Phương pháp nghiên cứu

2.1. Mô hình tối ưu phi tuyến với biến nguyên

Mô hình toán học phi tuyến với biến nguyên (MINLP) của bài toán lựa chọn tối ưu vị trí đặt và công suất của tụ bù ngang có xét ảnh hưởng của đồ thị phụ tải được mô tả như dưới đây.

Hàm mục tiêu:

$$\begin{aligned} \min f = & 365 \sum_{t=1}^{T=24} \sum_{ij \in \Phi_L} R_{ij} \times I_{ij,t}^2 \times S_{base} \times c_{\Delta A,t} \\ & + \sum_{\forall i \in \Phi_N} \sum_{a \in \Phi_{ca}} z_{i,a} \times S_{base} \times K_{C,a} \times Q_{Ci,a} \times \frac{r(1+r)^M}{(1+r)^M - 1} \end{aligned} \quad (1)$$

thỏa mãn các ràng buộc:

$$P_{hi,t} = \sum_{j \in \Phi_i, j \neq h} P_{ij,t} + R_{hi} \times I_{hi,t}^2 - P_{Gi,t} + P_{Di,t}; \quad \forall i \in \Phi_B; t=1, \dots, T \quad (2)$$

$$Q_{hi,t} = \sum_{j \in \Phi_i, j \neq h} Q_{ij,t} + X_{hi} \times I_{hi,t}^2 - Q_{Gi,t} + Q_{Di,t} - Q_{Ci}; \quad \forall i \in \Phi_B; t=1, \dots, T \quad (3)$$

$$U_{i,t}^2 - U_{j,t}^2 - 2 \times (R_{ij} P_{ij,t} + X_{ij} Q_{ij,t}) + (R_{ij}^2 + X_{ij}^2) I_{ij,t}^2 = 0; \quad \forall ij \in \Phi_L; t=1, \dots, T \quad (4)$$

$$I_{ij,t}^2 U_{i,t}^2 = P_{ij,t}^2 + Q_{ij,t}^2; \quad \forall ij \in \Phi_L; t=1, \dots, T \quad (5)$$

$$U_{\min}^2 \leq U_{i,t}^2 \leq U_{\max}^2; \quad \forall i \in \Phi_B; t=1, \dots, T \quad (6)$$

$$0 \leq I_{ij,t}^2 \leq I_{ij,\max}^2; \quad \forall ij \in \Phi_L; t=1, \dots, T \quad (7)$$

$$Q_{Ci} = \sum_{a \in \Phi_{ca}} z_{i,a} \times Q_{Ci,a}; \quad \forall i \in \Phi_B \quad (8)$$

$$\sum_{\forall i \in \Phi_N} \sum_{a \in \Phi_{ca}} z_{i,a} \leq Y \quad (9)$$

$$\sum_{a \in \Phi_{ca}} z_{i,a} \leq 1; \forall i \in \Phi_B \quad (10)$$

$$z_{i,a} \in \{0,1\}; \forall i \in \Phi_N; \forall a \in \Phi_{ca} \quad (11)$$

trong đó:

- Φ_L là tập các nhánh đường dây;
- Φ_B là tập các nút;
- Φ_{ca} là tập các tụ bù ngang được sử dụng;
- $c_{\Delta A,t}$ là giá biên điện năng tổn thất theo thời gian (\$/MWh);
- r là hệ số chiết khấu;
- M là tuổi thọ của tụ bù;
- $K_{C,a}$ là chi phí đầu tư trên mỗi kVAr của tụ bù loại a (\$/kVAr);
- $I_{ij,max}$ là dòng điện cho phép của dây dẫn trên nhánh ij (pu);
- $P_{Di,t}$ là công suất hữu công của phụ tải tại nút i tại thời điểm t (pu);
- $P_{Gi,t}$ là công suất hữu công của nguồn điện tại nút i tại thời điểm t (pu);
- $P_{ij,t}$ là công suất hữu công trên nhánh đường dây ij tại thời điểm t (pu);
- $Q_{Di,t}$ là công suất vô công của phụ tải tại nút i tại thời điểm t (pu);
- $Q_{Gi,t}$ là công suất vô công của nguồn điện tại nút i tại thời điểm t (pu);
- $Q_{ij,t}$ là công suất vô công trên nhánh đường dây ij tại thời điểm t (pu);
- $Q_{Ci,a}$ là công suất định mức của tụ bù loại a tại nút i (pu);
- R_{ij} là điện trở của nhánh đường dây ij (pu);
- X_{ij} là điện kháng của nhánh đường dây ij (pu);
- S_{base} là công suất cơ bản;
- $U_{i,t}$ là biên độ điện áp nút tại nút i tại thời điểm t (pu);
- U_i^{min} là trị số nhỏ nhất cho phép của mô-đun điện áp tại nút i (pu);
- U_i^{max} là trị số lớn nhất cho phép của mô-đun điện áp tại nút i (pu);
- Y là tổng vị trí cho phép lắp đặt tụ bù trong mạng lưới điện;
- $z_{i,a}$ là biến nhị phân, $z_{i,a} = 1$ khi tụ bù loại k được lắp đặt tại nút i ; ngược lại $z_{i,a} = 0$;

Hàm mục tiêu (1) tối thiểu hóa tổng chi phí của mạng lưới điện được quy về một năm, bao gồm chi phí liên quan đến tổn thất năng lượng hàng năm và chi phí đầu tư của tụ bù quy về một năm. Ràng buộc (2)-(3) là các phương trình mô tả lưới điện trong chế độ xác lập sử dụng phương pháp cộng công suất cho các mạng lưới phân phối điện có cấu trúc hình tia. Phương trình (4) mô tả mối quan hệ điện áp giữa các nút của nhánh đường dây ij . Phương trình (5) mô tả mối quan hệ giữa điện áp nút, dòng điện nhánh và công suất nhánh. Phương trình (6) mô tả ràng buộc về giới hạn điện áp nút. Giới hạn phát nóng của nhánh đường dây được mô tả bởi (7). Dung lượng tụ bù ngang kết nối tại một nút được mô tả bởi (8). Ràng buộc (9) và (10) giới hạn tổng số nút lắp đặt tụ bù và số tụ bù lắp đặt tại một nút. Ràng buộc (11) mô tả biến nhị phân.

Các biểu thức (1)-(11) là mô hình phi tuyến với biến nguyên (MINLP) của bài toán tối ưu hóa vị trí đặt và công suất định mức của tụ bù ngang có xét ảnh hưởng của đồ thị phụ tải. Hàm mục tiêu (1) và các ràng buộc (2)-(8) bao gồm các thành phần phi tuyến. Mô hình tối ưu MINLP có các nhược điểm như tính toán phức tạp, yêu cầu nhiều thời gian tính toán và thường chỉ tìm được lời

giải tối ưu cục bộ. Để giải quyết các khó khăn này, bài báo này đề xuất chuyển mô hình MINLP về mô hình MISOCP.

2.2. Mô hình nón bậc hai của hệ phương trình cân bằng công suất nút

Để đưa mô hình tối ưu ban đầu về dạng MISOCP, ta đặt $I_{ij,t}^2 = I_{ij,t}^{\text{sqr}}$ và $U_{i,t}^2 = U_{i,t}^{\text{sqr}}$.

Khi đó, hàm mục tiêu (1) được chuyển về phương trình (12) và các ràng buộc (2)-(7) sẽ được chuyển thành các ràng buộc (13)-(18) dưới đây.

$$\begin{aligned} \min f = & 365 \sum_{t=1}^{T=24} \sum_{ij \in \Phi_L} R_{ij} \times I_{ij,t}^{\text{sqr}} \times S_{\text{base}} \times C_{\Delta A,t} \\ & + \sum_{\forall i \in \Phi_N} \sum_{a \in \Phi_{Ca}} z_{i,a} \times S_{\text{base}} \times K_{C,a} \times Q_{Ci,a} \times \frac{r(1+r)^M}{(1+r)^M - 1} \end{aligned} \quad (12)$$

$$P_{hi,t} = \sum_{j \in \Phi_i, j \neq h} P_{ij,t} + R_{hi} \times I_{hi,t}^{\text{sqr}} - P_{Gi,t} + P_{Di,t}; \quad \forall i \in \Phi_B; t=1, \dots, T \quad (13)$$

$$Q_{hi,t} = \sum_{j \in \Phi_i, j \neq h} Q_{ij,t} + X_{hi} \times I_{hi,t}^{\text{sqr}} - Q_{Gi,t} + Q_{Di,t} - Q_{Ci}; \quad \forall i \in \Phi_B; t=1, \dots, T \quad (14)$$

$$U_{i,t}^{\text{sqr}} - U_{j,t}^{\text{sqr}} - 2 \times (R_{ij} P_{ij,t} + X_{ij} Q_{ij,t}) + (R_{ij}^2 + X_{ij}^2) I_{ij,t}^{\text{sqr}} = 0; \quad \forall ij \in \Phi_L; t=1, \dots, T \quad (15)$$

$$I_{ij,t}^{\text{sqr}} U_{i,t}^{\text{sqr}} \geq P_{ij,t}^2 + Q_{ij,t}^2; \quad \forall ij \in \Phi_L; t=1, \dots, T \quad (16)$$

$$U_{\min}^2 \leq U_{i,t}^{\text{sqr}} \leq U_{\max}^2; \quad \forall i \in \Phi_B; t=1, \dots, T \quad (17)$$

$$0 \leq I_{ij,t}^{\text{sqr}} \leq I_{\max}^2; \quad \forall ij \in \Phi_L; t=1, \dots, T \quad (18)$$

Phương trình (5) được biến đổi thành bất phương trình (16) để đảm bảo mô hình có dạng lồi.

2.3. Tuyến tính hóa tích của biến liên tục và biến nhị phân

Thành phần phi tuyến trong (8) là tích của biến liên tục và biến nhị phân. Thành phần này được biến đổi để đưa về dạng tuyến tính như dưới đây. Nhân mạnh rằng, kỹ thuật tuyến tính này là chính xác và không phát sinh sai số [13].

Đặt:

$$\hat{Q}_{Ci,a} = z_{i,a} \times Q_{Ci,a} \quad (19)$$

Khi đó, (8) được viết lại như sau:

$$Q_{Ci} = \sum_{a \in \Phi_{Ca}} \hat{Q}_{Ci,a}; \quad \forall i \in \Phi_B \quad (20)$$

Ta có:

$$\hat{Q}_{Ci,a} = \begin{cases} 0 & \text{khi } z_{i,a} = 0 \\ Q_{Ci,a} & \text{khi } z_{i,a} = 1 \end{cases} \quad (21)$$

Biểu thức (19) được tuyến tính hóa như sau:

$$\hat{Q}_{Ci,a} = Q_{Ci,a} - u_{Ci}; \quad \forall i \in \Phi_B \quad (22)$$

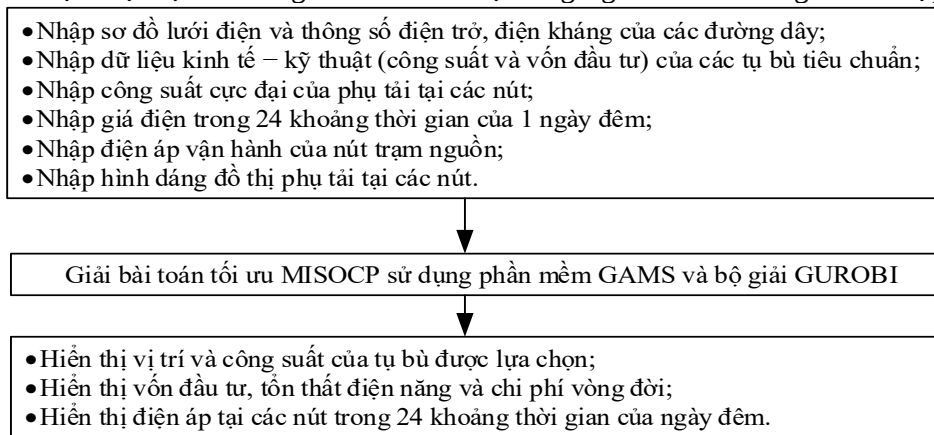
$$-K \times z_{i,a} \leq \hat{Q}_{Ci,a} \leq K \times z_{i,a}; \quad \forall i \in \Phi_B \quad (23)$$

$$-K \times (1 - z_{i,a}) \leq u_{Ci} \leq K \times (1 - z_{i,a}); \quad \forall i \in \Phi_B \quad (24)$$

trong đó, u_{Ci} là biến phụ trong quá trình tuyến tính hóa và K là hằng số dương đủ lớn.

Mô hình MISOCP đề xuất của bài toán bao gồm hàm mục tiêu (12), các ràng buộc (13)-(18), (20), (22)-(24) và (9)-(11). Mô hình MISOCP có thể được giải hiệu quả để tìm được nghiệm tối ưu toàn cục

sử dụng các bộ giải tối ưu như GUROBI, CPLEX và EXPRESS. Hình 1 mô tả lưu đồ của mô hình MISOCP để lựa chọn vị trí và công suất tối ưu của tụ bù ngang có xét hình dáng của đồ thị phụ tải.



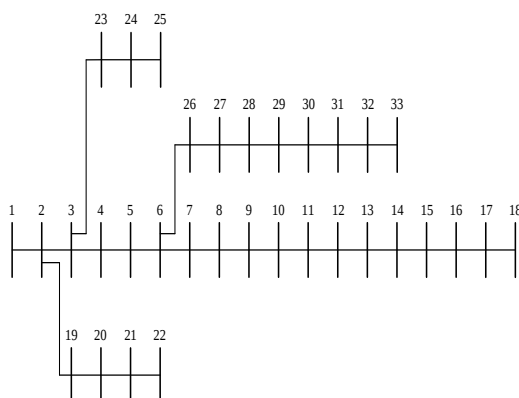
Hình 1. Lưu đồ của phương pháp MISOCP đề xuất

3. Kết quả và bàn luận

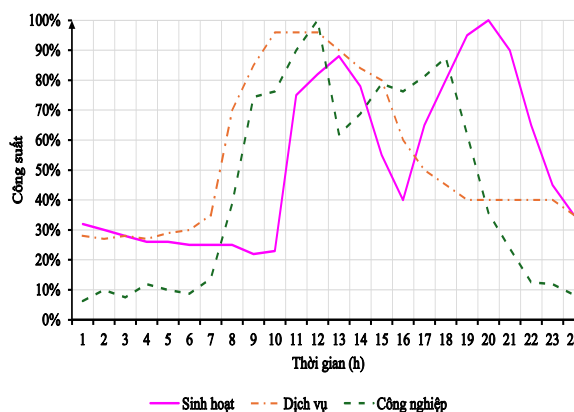
Mục này mô tả sự áp dụng của phương pháp tối ưu đề xuất trên lưới điện trung áp 33 nút IEEE [14] sử dụng môi trường lập trình GAMS [15] với bộ giải thương mại GUROBI. Máy tính cá nhân với cấu hình vi xử lý AMD Ryzen 5 5600G 3,9GHz và RAM 32GB được áp dụng để thực hiện các tính toán. Điện áp của nguồn điện tại nút 1 được chọn bằng 1 pu.

3.1. Lưới điện IEEE 33 nút

3.1.1. Mô tả dữ liệu



Hình 2. Lưới điện 33 nút IEEE



Hình 3. Đồ thị phụ tải ngày đêm

Hình 2 mô tả lưới điện phân phối trung áp 33 nút IEEE. Điện áp danh định của mạng điện bằng 12,66 kV. Tổng công suất cực đại của phụ tải bằng $3715 + j2300$ kVA. Giới hạn điện áp yêu cầu là $0,95 \leq U \leq 1,05$ pu. Dữ liệu cơ sở là $S_{cb} = 1$ MVA và $U_{cb} = 12,66$ kV.

Hình 3 mô tả sự thay đổi công suất tiêu thụ theo thời gian trong ngày của ba kiểu phụ tải (tải sinh hoạt, tải dịch vụ và tải công nghiệp) với ba hình dáng khác nhau của đồ thị phụ tải ngày đêm. Trên Hình 3, công suất tiêu thụ của phụ tải theo thời gian được tính theo phần trăm của công suất tiêu thụ cực đại [16]. Giá biên điện năng tổn thất theo thời gian và 27 kích cỡ tiêu chuẩn của tụ bù được lấy theo tài liệu [17]. Tuổi thọ của tụ bù được lấy bằng 5 năm, hệ số chiết khấu bằng 8% và tổng số vị trí cho phép lắp đặt tụ trong lưới điện là 10.

3.1.2. Kết quả tính toán

Trong bài báo này, bốn kịch bản của đồ thị phụ tải được tính toán và so sánh, bao gồm:

- Kịch bản 1: lưới điện chỉ có tải sinh hoạt;
- Kịch bản 2: lưới điện chỉ có tải dịch vụ;
- Kịch bản 3: lưới điện chỉ có tải công nghiệp;
- Kịch bản 4: lưới điện bao gồm tải sinh hoạt, tải dịch vụ và tải công nghiệp (xem Bảng 1).

Kết quả tối ưu vị trí đặt và công suất của tụ bù ngang cho bốn kịch bản được mô tả trong Bảng 2. Bảng 3 so sánh trị số của hàm mục tiêu và các kết quả quan trọng khác.

Bảng 1. Tính chất phụ tải của kịch bản bốn

Phụ tải	Nút
Sinh hoạt	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18
Dịch vụ	26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33
Công nghiệp	19, 20, 21, 22, 23, 24, 25

Bảng 2 cho thấy, các kết quả vị trí đặt, công suất và tổng công suất lắp đặt tụ bù của bốn kịch bản có sự khác biệt. Với kịch bản 1, vị trí đặt tụ lần lượt tại nút 7, 9, 15, 17, 25, 30, 32 và tổng công suất đặt lớn nhất trong bốn kịch bản với giá trị là 1800 kVAr. Với kịch bản 2, vị trí đặt tại các nút 7, 14, 15, 18, 25, 30, 32 và tổng công suất đặt là 1650 kVAr. Kịch bản 3 giống kịch bản 2 về tổng công suất đặt, tuy nhiên khác nhau về vị trí đặt và công suất định mức của tụ bù tại từng vị trí. Ba kịch bản đầu có tổng số vị trí lắp đặt tụ là 7 nút, trong khi đó kịch bản 4 có 6 vị trí đặt tụ bù. Bên cạnh đó, kịch bản 4 có tổng công suất tụ bù nhỏ nhất với giá trị là 1350 kVAr. Cả bốn kịch bản đều đặt tụ bù loại 450 kVAr tại nút 32. Đồng thời, ở cả 4 kịch bản, chỉ có 3 chủng loại tụ bù được sử dụng là 150, 300 và 450 kVAr.

Bảng 2. Kết quả tối ưu vị trí đặt và công suất định mức của tụ bù ngang

	Kịch bản 1	Kịch bản 2	Kịch bản 3	Kịch bản 4
Tổng nút đặt	7	7	7	6
Vị trí đặt (nút)	{7; 9; 15; 17; 25; 30; 32}	{7; 14; 15; 18; 25; 30; 32}	{7; 10; 14; 17; 29; 31; 32}	{8; 14; 18; 25; 29; 32}
Dung lượng tụ (kVAr)	{150; 150; 150; 300; 150; 450; 450}	{300; 150; 150; 150; 150; 300; 450}	{150; 150; 150; 300; 300; 150; 450}	{150; 150; 150; 150; 300; 450}
Tổng công suất tụ (kVAr)	1800	1650	1650	1350

Bảng 3 cho thấy sự khác nhau giữa các kịch bản về các kết quả điện áp nút, vốn đầu tư tụ và tổn thất điện năng trong ngày. Điện áp nhỏ nhất ở cả 4 kịch bản đều bằng nhau với giá trị là 0,95 pu. Ngoài ra, điện áp lớn nhất có sự khác biệt nhỏ. Cụ thể, điện áp lớn nhất của kịch bản 1 là 1,01597 pu (tại nút 17, $t = 9$ giờ). Điện áp lớn nhất của kịch bản 2 là 1,00791 pu (tại nút 18, $t = 2$ giờ). Với các kịch bản 3 và 4, các giá trị này lần lượt là 1,02807 pu (tại nút 17, $t = 1$ giờ) và 1,00355 pu (tại nút 32, $t = 4$ giờ). Về vốn đầu tư tụ, kịch bản 4 có chi phí đầu tư nhỏ nhất. Trong khi đó, vốn đầu tư tụ bù của kịch bản 2 và 3 giống nhau và bằng 98,60% so với kịch bản 1.

Bảng 3. So sánh lời giải tối ưu của 4 kịch bản

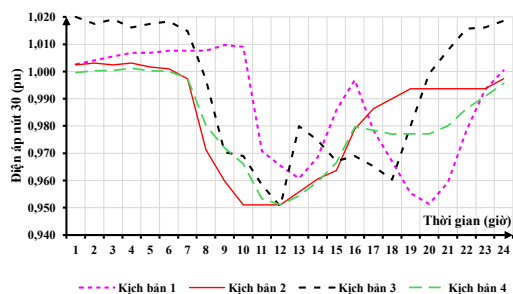
Thông số	Kịch bản			
	1	2	3	4
Điện áp nhỏ nhất (pu)	0,95	0,95	0,95	0,95
Điện áp lớn nhất (pu)	1,01597	1,00791	1,02807	1,00355
Vốn đầu tư tụ bù (\$)	632,70	623,85	623,85	518,85
Tổn thất điện năng (kWh/ngày)	1.616,4924	1.446,3965	1.646,1810	1.176,9466
Chi phí cho tổn thất điện năng (\$/năm)	7.080,2365	6.335,2168	7.210,2729	5.155,0259
Giá trị hàm mục tiêu (\$)	7.238,7003	6.491,4641	7.366,5202	5.284,9752

Ngoài ra, Bảng 3 cho thấy rằng, tổn thất điện năng của kịch bản 3 có trị số lớn nhất và bằng 1.646,1810 kWh (tương đương với 4,20% điện năng tiêu thụ của phụ tải). Tổn thất điện năng của kịch bản 1 và 2 lần lượt bằng 98,20% và 87,86% so với kịch bản 3. Tổn thất điện năng của kịch bản 1 và 2 lần lượt bằng 98,20% và 87,86% so với kịch bản 3. Tổn thất điện năng của kịch bản 1 và 2 lần lượt bằng 98,20% và 87,86% so với kịch bản 3.

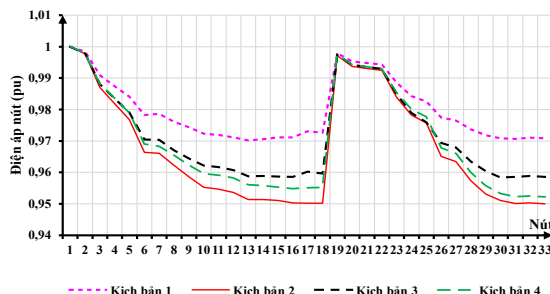
bản 4 có trị số nhỏ nhất (bằng 71,50% so với kịch bản 3). Bảng 3 cũng cho thấy rằng, hàm mục tiêu của kịch bản 3 có giá trị lớn nhất (7.366,5202 \$). Trong khi đó, giá trị hàm mục tiêu của kịch bản 1, 2 và 4 lần lượt bằng khoảng 98,26%, 88,12% và 71,74% so với kịch bản 3.

Hình 4 trình bày sự thay đổi điện áp của nút 30 trong 24 giờ tương ứng với bốn kịch bản. Điện áp nút của bốn kịch bản đạt giá trị lớn nhất tại các khoảng thời gian khác nhau. Cụ thể, điện áp nút 30 lớn nhất của kịch bản 1 là 1,00976 pu (tại $t = 9$ giờ). Các giá trị này lần lượt là 1,00311 pu (tại $t = 4$ giờ) ở kịch bản 2, 1,02007 pu (tại $t = 1$ giờ) ở kịch bản 3, và 1,00111 pu (tại $t = 4$ giờ) ở kịch bản 4. Tương tự, điện áp nhỏ nhất tại nút 30 của bốn kịch bản cũng có sự khác nhau về trị số và thời điểm xảy ra. Cụ thể, trị số nhỏ nhất của điện áp nút 30 tương ứng với bốn kịch bản lần lượt là 0,95136 pu (tại $t = 20$ giờ), 0,95108 pu (tại $t = 10-12$ giờ), 0,95050 pu (tại $t = 12$ giờ) và 0,95107 pu (tại $t = 12$ giờ).

Đồ thị biểu diễn sự phân bố điện áp tại các nút của lưới điện tại thời điểm $t = 11$ giờ cho bốn kịch bản được mô tả trong Hình 5. Điện áp lớn nhất của cả 4 kịch bản được giữ ở trị số bằng 1,0 pu tại nút 1. Điện áp nút ở cả bốn kịch bản sẽ có xu hướng giảm dần về phía các nút xa nguồn trên đường trục chính (từ nút 1 đến nút 18), tăng lên tại nút 19 và tiếp tục giảm dần đến nút 33. Tại thời điểm $t = 11$ giờ, điện áp nhỏ nhất của kịch bản 1 là 0,97013 pu (tại nút 13). Điện áp nhỏ nhất của kịch bản 2, 3 và 4 lần lượt là 0,95002 pu (tại nút 33), 0,95838 pu (tại nút 30) và 0,95219 pu (tại nút 33). Ngoài ra, tại cùng một nút, điện áp của kịch bản 1 có trị số lớn nhất và kịch bản 2 là nhỏ nhất.



Hình 4. Phân bố điện áp nút 30 theo thời gian



Hình 5. Điện áp nút của lưới điện tại $t=11$ giờ

3.1.3. Đánh giá hiệu quả của mô hình tối ưu đề xuất

Bảng 4. So sánh lời giải tối ưu của các phương pháp

Phương pháp	Nút đặt	Công suất định mức tụ bù (kVAr)	Tổn thất công suất (kW)	Độ giảm tổn thất công suất (%)
Lưới ban đầu	—	—	210,987	
TSM [18]	{7; 29; 30}	{850; 25; 900}	144,040	31,73
FRCGA [19]	{28; 6; 29; 8; 30; 9}	{25; 475; 300; 175; 400; 350}	141,240	33,06
FPA [8]	{13; 24; 30}	{450; 450; 900}	139,075	34,08
MISOCP đề xuất	{12; 24; 30}	{450; 450; 1050}	138,416	34,40

Hiệu quả của mô hình tối ưu đề xuất được tính toán trên lưới điện IEEE 33 nút với hàm mục tiêu là cực tiểu tổn thất công suất tác dụng. Ngoài ra, kết quả so sánh được tính toán tại thời điểm phụ tải cực đại. Phương pháp MISOCP đề xuất được so sánh với các phương pháp dựa trên thuật toán metaheuristic, bao gồm phương pháp hai giai đoạn (TSM – Two Stage Method) [18], thuật toán di truyền mã thực kết hợp logic mờ (FRCGA – Fuzzy Real Coded Genetic Algorithm) [19] và thuật toán thụ phấn hoa (FPA – Flower Pollination Algorithm) [8]. Kết quả so sánh chi tiết được trình bày trong Bảng 4. Bảng 4 cho thấy mô hình tối ưu MISOCP đề xuất có tổn thất công suất nhỏ nhất (bằng 138,416 kW) khi so sánh với các phương pháp TSM, FRCGA và FPA. Lời giải tối ưu của mô hình đề xuất là đặt tụ bù tại các nút 12, 24 và 30 với dung lượng lần lượt là 450 kVAr, 450 kVAr và 1050 kVAr. Độ

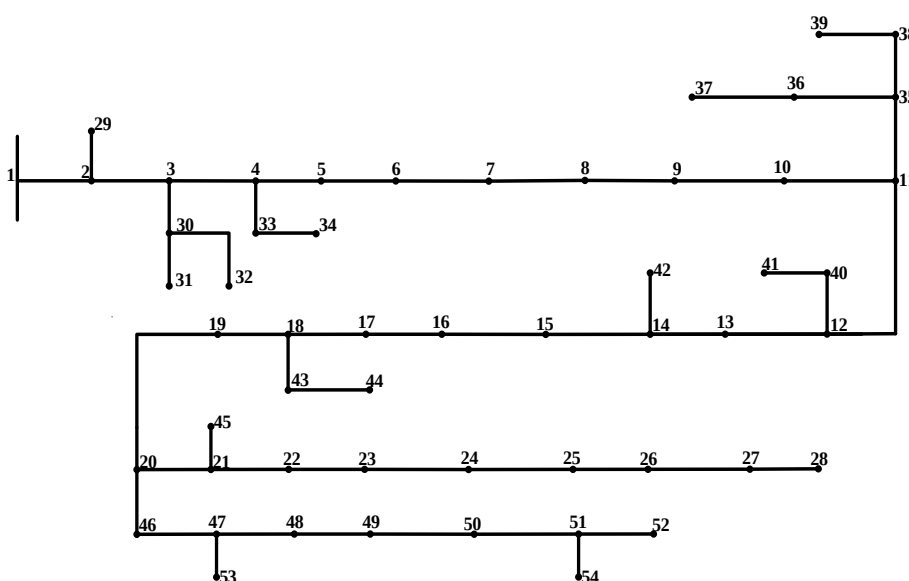
giảm tổn thất công suất tác dụng (so với lưới điện ban đầu) của các phương pháp TSM, FRCGA, FPA và MISOCP đề xuất lần lượt là 31,73%, 33,06%, 34,08% và 34,40%. Điều này cho thấy phương pháp đề xuất hiệu quả hơn các phương pháp TSM, FRCGA và FPA.

3.2. Lưới điện thực tế 54 nút tại Việt Nam

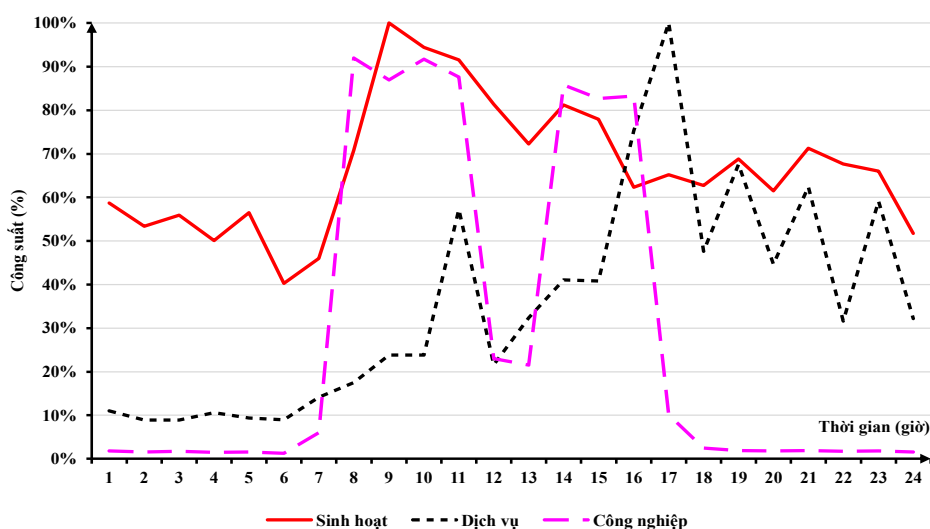
3.2.1. Mô tả dữ liệu

Hình 6 mô tả lưới điện thực tế 54 nút tại huyện Lục Ngạn, tỉnh Bắc Giang, Việt Nam. Điện áp danh định của mạng điện bằng 35 kV. Tuổi thọ của tụ bù được lấy bằng 5 năm, hệ số chiết khấu bằng 8% và tổng số vị trí cho phép lắp đặt tụ trong lưới điện là 10. Giá biên điện năng tổn thất theo thời gian và 27 kích cỡ tiêu chuẩn của tụ bù được lấy theo tài liệu [17].

Hình 7 mô tả sự thay đổi công suất tiêu thụ trong ngày của ba kiểu phụ tải (tải sinh hoạt, tải dịch vụ và tải công nghiệp) với ba hình dáng khác nhau của đồ thị phụ tải ngày đêm.



Hình 6. Sơ đồ lưới điện 54 nút huyện Lục Ngạn, tỉnh Bắc Giang



Hình 7. Đồ thị phụ tải ngày đêm của lưới 54 nút

3.2.2. Kết quả tính toán

Bốn kịch bản của đồ thị phụ tải được tính toán và so sánh, bao gồm:

- Kịch bản 1: lưới điện chỉ có tải sinh hoạt;
- Kịch bản 2: lưới điện chỉ có tải dịch vụ;
- Kịch bản 3: lưới điện chỉ có tải công nghiệp;
- Kịch bản 4: lưới điện bao gồm tải sinh hoạt, tải dịch vụ và tải công nghiệp (xem Bảng 5).

Kết quả tối ưu vị trí đặt và công suất của tụ bù ngang cho bốn kịch bản được mô tả trong Bảng 6. Bảng 7 so sánh trị số của hàm mục tiêu và các kết quả quan trọng khác.

Bảng 5. Tính chất phụ tải của kịch bản bốn

Phụ tải	Nút
Sinh hoạt	15, 16, 17, 31, 32, 34, 36, 37, 38, 41, 42, 54
Dịch vụ	7, 8, 9, 10, 22, 23, 24, 27, 28, 48, 49, 50
Công nghiệp	5, 6, 13, 19, 25, 26, 29, 33, 39, 40, 43, 44, 45, 46, 52, 53

Bảng 6 cho thấy các kết quả tính toán tụ bù ngang của bốn kịch bản có sự khác biệt trên lưới 54 nút. Với kịch bản 1, vị trí đặt tụ lần lượt tại nút 5, 27, 38, 43, 50 và tổng công suất đặt lớn nhất trong bốn kịch bản với giá trị là 4500 kVAR. Với kịch bản 2, tụ bù được lắp đặt tại các nút 11, 27, 28, 33, 48 và tổng công suất đặt là 3600 kVAR. Kịch bản 3 giống kịch bản 4 về tổng số nút đặt và tổng công suất các tụ, nhưng khác nhau về vị trí lắp đặt tụ bù. Hai kịch bản 1 và 2 có tổng số vị trí lắp đặt tụ là 5 nút, trong khi kịch bản 3 và 4 đều đặt tại 3 vị trí.

Bảng 6. Vị trí và công suất định mức của tụ bù ngang trong lưới 54 nút

	Kịch bản 1	Kịch bản 2	Kịch bản 3	Kịch bản 4
Tổng nút đặt	5	5	3	3
Vị trí đặt (nút)	{5; 27; 38; 43; 50}	{11; 27; 28; 33; 48}	{8; 20; 27}	{7; 22; 38}
Dung lượng tụ (kVAR)	{1200; 900; 1200; 600; 600}	{1200; 1200; 450; 150; 600}	{900; 900; 600}	{900; 900; 600}
Tổng công suất tụ (kVAR)	4500	3600	2400	2400

Lời giải tối ưu của lưới 54 nút được trình bày trong Bảng 7. Điện áp nhỏ nhất ở 4 kịch bản đầu giống nhau (bằng 0,95 pu) và điện áp lớn nhất có sự khác biệt nhỏ. Cụ thể, điện áp lớn nhất của kịch bản 1 và 4 đều bằng 1,00 pu. Điện áp lớn nhất của kịch bản 2 và 3 lần lượt là 1,0075 pu và 1,0072 pu. Về vốn đầu tư tụ, kịch bản 1 có chi phí đầu tư lớn nhất. Kịch bản 2 có vốn đầu tư bằng 87,11% của kịch bản 1. Vốn đầu tư tụ bù của kịch bản 3 và 4 giống nhau (bằng 55,15% so với kịch bản 1). Ngoài ra, tổn thất điện năng tương ứng với bốn kịch bản có sự khác biệt rõ rệt. Kịch bản chỉ có tải sinh hoạt có tổn thất điện năng lớn nhất (bằng 5.275,8476 kWh/ngày). Các kịch bản 2, 3, 4 có tổn thất điện năng lần lượt bằng 45,76%, 56,48% và 41,80% trị số của kịch bản 1. Giá trị hàm mục tiêu của kịch bản 1 cũng lớn nhất (bằng 23.317,7700 \$). Giá trị hàm mục tiêu của kịch bản 2, 3, 4 lần lượt bằng 46,13%, 56,47%, 41,92% giá trị của kịch bản 1.

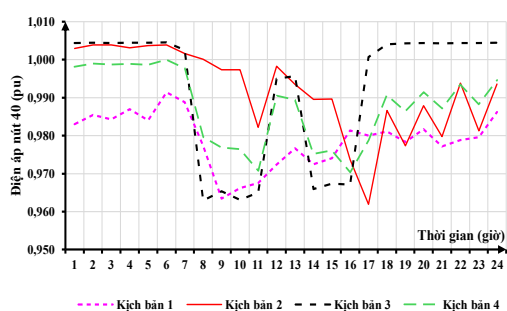
Bảng 7. So sánh lời giải tối ưu của bốn kịch bản lưới 54 nút

Thông số	Kịch bản			
	1	2	3	4
Điện áp nhỏ nhất (pu)	0,95	0,95	0,95	0,95
Điện áp lớn nhất (pu)	1,00	1,0075	1,0072	1,00
Vốn đầu tư tụ bù (\$)	836,70	728,85	461,40	461,40
Tổn thất điện năng (kWh/ngày)	5.275,8476	2.414,3761	2.980,0542	2.205,1439
Chi phí cho tổn thất điện năng (\$/năm)	23.108,2124	10.574,9674	13.052,6375	9.658,5301
Giá trị hàm mục tiêu (\$)	23.317,7700	10.757,5126	13.168,2103	9.774,0907

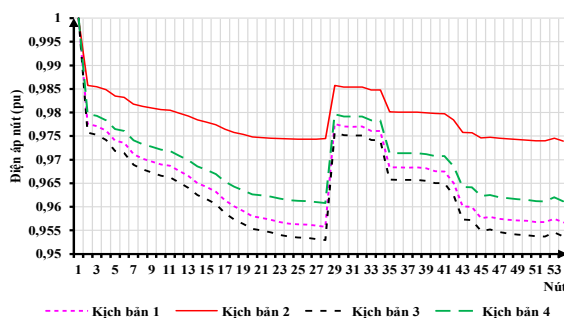
Điện áp nút 40 trong một ngày đêm tương ứng với bốn kịch bản của lưới 54 nút được trình bày trên Hình 8. Hình 8 cho thấy rằng điện áp nhỏ nhất và lớn nhất tại nút 40 với bốn kịch bản xảy ra

tại các thời điểm khác nhau. Các thời điểm đồ thị phụ tải có giá trị lớn nhất (tải nặng nhất) thì điện áp sẽ giảm thấp nhất và thời điểm đồ thị phụ tải có giá trị nhỏ nhất (tải thấp nhất) thì điện áp sẽ tăng cao nhất. Cụ thể, với kịch bản 1, điện áp lớn nhất và nhỏ nhất tại nút 40 lần lượt xảy ra tại thời điểm $t = 6$ giờ và $t = 9$ giờ, tương ứng với thời điểm đồ thị phụ tải đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất. Điện áp lớn nhất của các kịch bản 2, 3 và 4 lần lượt xảy ra tại thời điểm $t = 3$ giờ, $t = 6$ giờ và $t = 6$ giờ. Điện áp nhỏ nhất tương ứng ba kịch bản trên lần lượt xảy ra tại các thời điểm $t = 17$ giờ, $t = 8$ giờ và $t = 16$ giờ.

Hình 9 trình bày phân bố điện áp tại thời điểm $t = 11$ giờ của lưới 54 nút. Nhìn chung, điện áp có xu hướng giảm dần từ nút nguồn (nút 1) đến nút 28, tăng lên tại nút 29 và tiếp tục giảm dần về nút 54. Từ Hình 9, ta thấy rằng sự phân bố điện áp tương ứng với bốn kịch bản có sự biến thiên tương đồng với nhau. Đồng thời, tại cùng một nút, điện áp của kịch bản 2 có giá trị lớn nhất và điện áp của kịch bản 3 có giá trị nhỏ nhất.



Hình 8. Phân bố điện áp nút 40 theo thời gian



Hình 9. Điện áp nút của lưới điện tại $t=11$ giờ

4. Kết luận

Bài báo đề xuất mô hình tối ưu dựa trên quy hoạch nón bậc hai với biến nguyên (MISOCP) từ mô hình phi tuyến với số nguyên (MINLP) để tính toán tối ưu vị trí đặt và công suất định mức của tụ điện bù ngang có xét ảnh hưởng của hình dáng đồ thị phụ tải trong một ngày đêm. Vị trí đặt và công suất định mức của tụ điện bù ngang được xác định để tối thiểu hóa tổng chi phí của lưới điện trong một năm và thỏa mãn các ràng buộc như hệ phương trình cân bằng công suất nút, giới hạn phát nóng của các đường dây, giới hạn miền giá trị của điện áp nút và tổng số nút đặt tụ bù ngang. Mô hình MISOCP được kiểm chứng trên lưới điện IEEE 33 nút và lưới điện thực tế 54 nút, giải bằng GUROBI trong môi trường lập trình GAMS. Bốn kịch bản của hình dáng đồ thị phụ tải ngày đêm được so sánh. Kết quả cho thấy sự thay đổi phụ tải theo thời gian ảnh hưởng đáng kể đến phương án tối ưu lựa chọn tụ bù trên cả hai lưới điện. Ngoài ra, mô hình tối ưu đề xuất được so sánh với các nghiên cứu trước đây và cho thấy hiệu quả trong việc giảm tổn thất điện năng. Điểm mới nổi bật của bài báo này là áp dụng mô hình tối ưu MISOCP để phân tích ảnh hưởng của hình dáng đồ thị phụ tải đến vị trí đặt và công suất của tụ bù ngang, cho phép nâng cao đáng kể hiệu quả kinh tế trong quy hoạch và vận hành lưới điện phân phối thực tế. Hướng nghiên cứu trong tương lai là lựa chọn tối ưu tụ bù ngang có xét đồng thời ảnh hưởng của hình dáng đồ thị phụ tải, sự thay đổi của giá điện, sự thay đổi của chi phí tụ bù và tính bất định của các nguồn năng lượng tái tạo.

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

- [1] L. V. Dao, T. V. Do, M. H. Do, and N. V. Pham, "Newton method based on a Wirtinger's calculus formulation for the load flow in power distribution grids integrated time-varying ZIP load: a case study in Vietnam," *TNU J. Sci. Technol.*, vol. 229, no. 14, pp. 135–143, Oct. 2024, doi: 10.34238/tnu-jst.10775.
- [2] S. Mishra, D. Das, and S. Paul, "A comprehensive review on power distribution network reconfiguration," *Energy Syst.*, vol. 8, no. 2, pp. 227–284, May 2017, doi: 10.1007/s12667-016-0195-7.
- [3] S. Dhivya and R. Arul, "Demand Side Management Studies on Distributed Energy Resources: A Survey," *Trans. Energy Syst. Eng. Appl.*, vol. 2, no. 1, Jul. 2021, Art. no. 1, doi: 10.32397/tesea.vol2.n1.2.

- [4] A. Valencia, R. A. Hincapie, and R. A. Gallego, "Optimal location, selection, and operation of battery energy storage systems and renewable distributed generation in medium–low voltage distribution networks," *J. Energy Storage*, vol. 34, Feb. 2021, Art. no. 102158, doi: 10.1016/j.est.2020.102158.
- [5] S. Segura, R. Romero, and M. J. Rider, "Efficient heuristic algorithm used for optimal capacitor placement in distribution systems," *Int. J. Electr. Power Energy Syst.*, vol. 32, no. 1, pp. 71–78, Jan. 2010, doi: 10.1016/j.ijepes.2009.06.024.
- [6] W. M. D. Rosa, P. Rossoni, J. C. Teixeira, E. A. Belati, and P. T. L. Asano, "Optimal Allocation of Capacitor Banks using Genetic Algorithm and Sensitivity Analysis," *IEEE Lat. Am. Trans.*, vol. 14, no. 8, pp. 3702–3707, Aug. 2016, doi: 10.1109/TLA.2016.7786353.
- [7] K. Prakash and M. Sydulu, "Particle Swarm Optimization Based Capacitor Placement on Radial Distribution Systems," in *2007 IEEE Power Engineering Society General Meeting*, Tampa, FL, USA: IEEE, Jun. 2007, pp. 1–5, doi: 10.1109/PES.2007.386149.
- [8] V. Tamilselvan, T. Jayabarathi, T. Raghunathan, and X.-S. Yang, "Optimal capacitor placement in radial distribution systems using flower pollination algorithm," *Alex. Eng. J.*, vol. 57, no. 4, pp. 2775–2786, Dec. 2018, doi: 10.1016/j.aej.2018.01.004.
- [9] M. Milovanović, D. Tasić, J. Radosavljević, and B. Perović, "Optimal Placement and Sizing of Inverter-Based Distributed Generation Units and Shunt Capacitors in Distorted Distribution Systems Using a Hybrid Phasor Particle Swarm Optimization and Gravitational Search Algorithm," *Electr. Power Compon. Syst.*, vol. 48, no. 6–7, pp. 543–557, Apr. 2020, doi: 10.1080/15325008.2020.1797934.
- [10] F. Llorens-Iborra, J. Riquelme-Santos, and E. Romero-Ramos, "Mixed-integer linear programming model for solving reconfiguration problems in large-scale distribution systems," *Electr. Power Syst. Res.*, vol. 88, pp. 137–145, Jul. 2012, doi: 10.1016/j.epsr.2012.01.014.
- [11] O. D. Montoya, W. Gil-González, and A. Garcés, "On the Conic Convex Approximation to Locate and Size Fixed-Step Capacitor Banks in Distribution Networks," *Computation*, vol. 10, no. 2, Feb. 2022, Art. no. 32, doi: 10.3390/computation10020032.
- [12] M. Mahdavi, A. Awaifo, K. Schmitt, and M. Chamana, "Economical Installation of Capacitor Banks in Optimal Places of Distribution Feeders Considering Load Fluctuations," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 60, no. 5, pp. 7646–7655, Sep. 2024, doi: 10.1109/TIA.2024.3413756.
- [13] X. Wu, A. J. Conejo, and S. Mathew, "Optimal Siting of Batteries in Distribution Systems to Enhance Reliability," *IEEE Trans. Power Deliv.*, vol. 36, no. 5, pp. 3118–3127, Oct. 2021, doi: 10.1109/TPWRD.2020.3034095.
- [14] S. H. Dolatabadi, M. Ghorbanian, P. Siano, and N. D. Hatziaargyriou, "An Enhanced IEEE 33 Bus Benchmark Test System for Distribution System Studies," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 36, no. 3, pp. 2565–2572, May 2021, doi: 10.1109/TPWRS.2020.3038030.
- [15] GAMS Development Corp., "GAMS Documentation 46." Feb. 17, 2024. [Online]. Available: <https://www.gams.com>. [Accessed Feb. 25, 2025].
- [16] S. S. F. Souza, R. Romero, J. Pereira, and J. T. Saraiva, "Artificial immune algorithm applied to distribution system reconfiguration with variable demand," *Int. J. Electr. Power Energy Syst.*, vol. 82, pp. 561–568, Nov. 2016, doi: 10.1016/j.ijepes.2016.04.038.
- [17] L. A. G. Pareja, J. M. López-Lezama, and O. G. Carmona, "A MILP Model for Optimal Conductor Selection and Capacitor Banks Placement in Primary Distribution Systems," *Energies*, vol. 16, no. 11, Jan. 2023, Art. no. 11, doi: 10.3390/en16114340.
- [18] A. R. Abul'Wafa, "Optimal capacitor allocation in radial distribution systems for loss reduction: A two stage method," *Electr. Power Syst. Res.*, vol. 95, pp. 168–174, Feb. 2013, doi: 10.1016/j.epsr.2012.09.004.
- [19] A. R. Abul'Wafa, "Optimal capacitor placement for enhancing voltage stability in distribution systems using analytical algorithm and Fuzzy-Real Coded GA," *Int. J. Electr. Power Energy Syst.*, vol. 55, pp. 246–252, Feb. 2014, doi: 10.1016/j.ijepes.2013.09.014.