

NONLINEAR TRAJECTORY SIMULATION OF A QUADCOPTER USING THE BEEMAN METHOD

Nguyen Cong Minh*, Nguyen Hoang Quan

University of Engineering and Technology - Vietnam National University

ARTICLE INFO		ABSTRACT
Received:	01/4/2025	Quadcopters are increasingly being applied in various fields such as surveillance, transportation, and search and rescue, etc. This reality necessitates the study and development of dynamic models for quadcopters to accurately simulate flight trajectories. This study focuses on developing a quadcopter dynamic model based on the Newton-Euler equations and applying the Beeman method to compute flight trajectories. Beeman is a numerical algorithm with high accuracy, particularly effective in nonlinear dynamic problems. The effectiveness of this method is verified by comparing it with the fourth-order Runge-Kutta method. The results show that the Beeman method achieves a processing time of only 61.54% to 73.75% compared to the processing time of the fourth-order Runge-Kutta method, while maintaining an error margin of less than 1%. This confirms that Beeman is an optimal choice for nonlinear dynamic simulations of quadcopters, helping to reduce computation time, enhance efficiency, and maintain high accuracy. Accurate trajectory simulation can support the improvement of control algorithms, assess quadcopter stability under external environmental influences, and predict flight trajectories based on experimental data.
Revised:	16/6/2025	
Published:	17/6/2025	
KEYWORDS		
Quadcopter		
Nonlinear dynamics		
Beeman method		
Flight trajectory		
Computational efficiency		

MÔ PHỎNG QUỹ ĐẠO PHI TUYẾN CỦA QUADCOPTER BẰNG PHƯƠNG PHÁP BEEMAN

Nguyễn Công Minh*, Nguyễn Hoàng Quân

Trường Đại học Công nghệ - Đại học Quốc gia Hà Nội

THÔNG TIN BÀI BÁO		TÓM TẮT
Ngày nhận bài:	01/4/2025	Quadcopter ngày càng được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực như giám sát, vận chuyển và tìm kiếm cứu nạn, v.v. Thực tế này đòi hỏi cần thiết phải nghiên cứu xây dựng các mô hình động lực học quadcopter để mô phỏng chính xác quỹ đạo bay. Nghiên cứu này tập trung vào việc phát triển mô hình động lực học quadcopter dựa trên phương trình Newton-Euler và áp dụng phương pháp Beeman để tính toán quỹ đạo bay. Đây là một thuật toán số có độ chính xác cao, đặc biệt hiệu quả trong các bài toán động lực học phi tuyến, đặc biệt được ứng dụng trong các bài toán động lực học phi tuyến. Hiệu quả của phương pháp được kiểm chứng bằng so sánh với phương pháp Runge-Kutta bậc 4. Kết quả cho thấy phương pháp Beeman cho thời gian xử lý nhanh hơn chỉ bằng 61,54% tới 73,75% so với thời gian xử lý của phương pháp Runge-Kutta bậc 4, trong khi độ sai số vẫn duy trì dưới 1%. Điều này khẳng định Beeman là một lựa chọn tối ưu trong mô phỏng động lực học phi tuyến của quadcopter, giúp rút ngắn thời gian tính toán, tăng hiệu suất tính toán mà vẫn đảm bảo độ chính xác cao. Việc mô phỏng quỹ đạo bay chính xác có thể hỗ trợ cải tiến thuật toán điều khiển, đánh giá mức độ ổn định của quadcopter khi chịu tác động từ môi trường bên ngoài hoặc dự đoán quỹ đạo bay dựa trên dữ liệu thực nghiệm.
Ngày hoàn thiện:	16/6/2025	
Ngày đăng:	17/6/2025	
TỪ KHÓA		
Quadcopter		
Động lực học phi tuyến		
Phương pháp Beeman		
Quỹ đạo bay		
Hiệu suất tính toán		

DOI: <https://doi.org/10.34238/tnu-jst.12451>

* Corresponding author. Email: ncminh@vnu.edu.vn

1. Giới thiệu

Ngày nay, Quadcopter là một loại máy bay không người lái với bốn cánh quạt bố trí tại bốn góc, thường được ứng dụng rộng rãi trong các lĩnh vực giám sát, vận chuyển hàng hóa, tìm kiếm cứu hộ, v.v. Nhờ khả năng bay linh hoạt và dễ điều khiển, chúng có thể thực hiện các nhiệm vụ ở khu vực khó tiếp cận hoặc nguy hiểm. Xây dựng mô hình động lực học Quadcopter không chỉ là yêu cầu cần thiết cho việc nghiên cứu lý thuyết mà còn có ý nghĩa thực tiễn to lớn trong việc thiết kế, tối ưu và vận hành các hệ thống bay an toàn, hiệu quả.

Các nghiên cứu trước đây đã xây dựng mô hình động lực học Quadcopter dựa trên phương trình Newton-Euler hoặc mô hình không gian trạng thái [1] – [3]. Tuy nhiên, hầu hết các nghiên cứu này chỉ tập trung vào mô phỏng dựa trên các phương pháp như phương pháp Euler, phương pháp Runge-Kutta bậc 4 (RK4) và phương pháp ODE45. Các nghiên cứu trước đây [4] – [6] sử dụng thuật toán tối ưu hóa để điều khiển quỹ đạo nhưng chỉ kiểm tra trong môi trường mô phỏng. Tương tự, Smith và Brown [7] sử dụng mô phỏng phần mềm trong vòng (SITL), song vẫn dừng ở mức lý thuyết và đòi hỏi nhiều tài nguyên tính toán. Mặc dù những phương pháp này cho kết quả chính xác cao nhưng lại rất tốn thời gian để xử lý giải hệ phương trình vi phân khi đưa các dữ liệu thử nghiệm liên tục vào để giải. Những hạn chế này làm giảm tính khả thi trong việc đánh giá chính xác hiệu suất thực tế của Quadcopter.

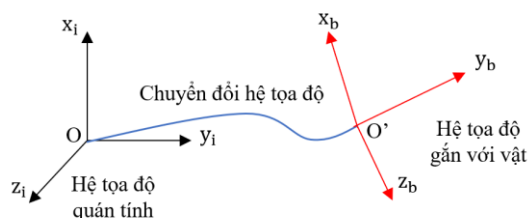
Nghiên cứu này phát triển mô hình động lực học của Quadcopter bằng phương pháp Newton-Euler và áp dụng phương pháp Beeman để giải hệ phương trình phi tuyến, nhằm mô phỏng quỹ đạo bay. Dựa trên phương pháp tính toán số Beeman, nghiên cứu này giải mô hình động lực học Quadcopter được đề xuất trong tài liệu tham khảo [8] – [10]. Đây là một phương pháp tích phân số thường được sử dụng trong cơ học tính toán, đặc biệt phù hợp với các hệ có gia tốc phụ thuộc mạnh vào vị trí và vận tốc. Phương pháp này có ưu điểm cải thiện độ ổn định và bảo toàn năng lượng tốt hơn trong các bài toán động lực học. Kết quả mô phỏng bằng phương pháp Beeman sẽ được so sánh với phương pháp RK4, một phương pháp tính toán số có độ chính xác cao và được sử dụng phổ biến.

Trong phần tiếp theo, bài báo sẽ trình bày cách thức xây dựng mô hình động lực học Quadcopter dựa trên phương pháp Newton-Euler và áp dụng phương pháp Beeman giúp đánh giá chính xác các chuyển động tịnh tiến và quay của quadcopter trong các kịch bản bay khác nhau. Kết quả thu được chứng tỏ phương pháp này giảm tải tính toán, với phương pháp Beeman cho thời gian xử lý nhanh hơn chỉ bằng 61,54% tới 73,75% so với thời gian xử lý của phương pháp RK4, trong khi độ sai số vẫn duy trì dưới 1%. Điều này rất quan trọng đối với các ứng dụng mô phỏng thời gian thực hoặc trên các hệ thống có tài nguyên tính toán hạn chế.

2. Cơ sở lý thuyết

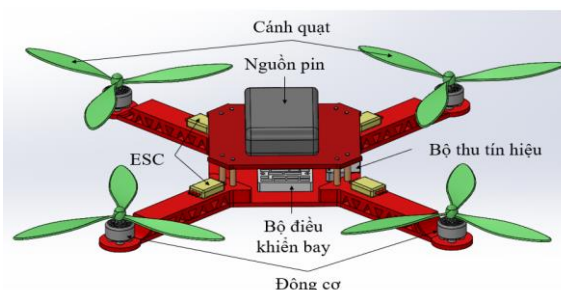
2.1. Hệ quy chiếu

Chuyển động của Quadcopter được xác định trên hệ trục tọa độ quán tính $Ox_iy_iz_i$ và hệ trục tọa độ gắn với vật $O'x_b y_b z_b$ như trên Hình 1.



Hình 1. Hệ quy chiếu

Trong hệ tọa độ quán tính $Ox_iy_iz_i$, tọa độ vị trí tuyệt đối của Quadcopter được ký hiệu là x, y và z . Vận tốc theo ba phương lần lượt là v_x, v_y và v_z . Góc tư thế, hay còn gọi là góc vị trí, được xác



Hình 2. Quadcopter dạng chữ X

định bằng ba góc Euler, góc pitch θ là góc quay của quadcopter quanh trục Y, góc roll ϕ là góc quay của Quadcopter quay quanh trục X, góc yaw ψ là góc quay của Quadcopter quay quanh trục Z. Trong hệ tọa độ gắn với vật $O_{x_b}y_bz_b$, vận tốc góc được xác định bởi p, q và r .

Mã trận xoay R mô tả sự thay đổi góc quay giữa hai hệ tọa độ có dạng sau:

$$R = \begin{bmatrix} C(\theta)C(\psi) & -C(\phi)S(\psi) + C(\psi)S(\theta)S(\phi) & S(\psi)S(\phi) + C(\psi)C(\phi)S(\theta) \\ C(\theta)S(\psi) & C(\psi)C(\phi) + S(\theta)S(\phi)S(\psi) & -S(\phi)C(\psi) + C(\phi)S(\theta)S(\psi) \\ -S(\theta) & C(\theta)S(\phi) & C(\theta)C(\phi) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Mối quan hệ giữa vận tốc góc trong hệ tọa độ quán tính và hệ tọa độ gắn với Quadcopter được biểu diễn qua biểu thức sau:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & S(\phi)T(\theta) & C(\phi)T(\theta) \\ 0 & C(\phi) & -S(\phi) \\ 0 & S(\phi)/C(\theta) & C(\phi)/C(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2)$$

trong đó $S_x = \sin(x)$, $C_x = \cos(x)$ và $T_x = \tan(x)$.

2.2. Hệ phương trình vi phân mô phỏng động lực học Quadcopter

Để xây dựng mô hình động lực học cho Quadcopter, nghiên cứu này sử dụng phương pháp Newton-Euler nhằm thiết lập các phương trình mô tả chuyển động tịnh tiến và quay dưới tác động của lực đẩy và mô-men xoắn. Các phương trình được thiết lập dựa trên cấu trúc cụ thể của mẫu Quadcopter trong Hình 2 và thông số kỹ thuật trong Bảng 1 [11].

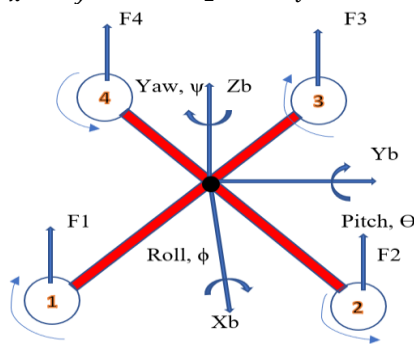
Bảng 1. Thông số kỹ thuật của quadcopter dạng chữ X

Thông số	Ký hiệu	Giá trị (Đơn vị)
Hệ số lực đẩy	k	$2,98 \times 10^{-6} \text{ (N/rad}^2/\text{s}^2\text{)}$
Mô-men cản	b	$1,14 \times 10^{-6} \text{ (N.m/rad}^2/\text{s}^2\text{)}$
Khối lượng	m	0,468 (kg)
Gia tốc trọng trường	g	9,81 (m/s ²)
Cánh tay đòn	l	0,225 (m)
Momen quán tính	I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}	$4,856 \times 10^{-3}; 4,856 \times 10^{-3}; 8,801 \times 10^{-3} \text{ (kg.m}^2\text{)}$
Hệ số cản hình học	A_x, A_y, A_z	0,25 (kg/s)

Theo định luật Newton, phương trình chuyển động tuyến tính Quadcopter [8] – [10] được mô tả như sau:

$$m \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = R \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} - m \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad (3)$$

Trong đó, vector lực F là thành phần lực đẩy sinh ra bởi động cơ cánh quạt của quadcopter theo các trục tọa độ [8], tuy nhiên vì hướng của lực đẩy luôn cùng hướng với trục Z như trong Hình 3 của hệ tọa độ gắn với vật do đó $F_x = F_y = 0$, và $F_z = k\omega_i^2$.



Hình 3. Sơ đồ biểu diễn quadcopter dạng chữ X

Khai triển (3) thành hệ phương trình vi phân cho chuyển động tịnh tiến như sau:

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x} &= [S(\psi)S(\phi) + C(\psi)C(\phi)S(\theta)] \cdot F_z - A_x v_x \\ m \cdot \ddot{y} &= [-S(\phi)C(\psi) + C(\phi)S(\theta)S(\psi)] \cdot F_z - A_y v_y \\ m \cdot \ddot{z} &= [C(\theta)C(\phi)] \cdot F_z - m \cdot g - A_z v_z \end{aligned} \quad (4)$$

Phương trình Euler cho chuyển động quay của Quadcopter [8], [10], [12] được mô tả như sau:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{I} \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\eta} \times (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\eta}) \quad (5)$$

Trong đó, vector $\boldsymbol{\tau}$ và vector $\boldsymbol{\eta}$ lần lượt là mô-men xoắn và vận tốc góc theo các trục của Quadcopter, $\mathbf{I}$ là ma trận 3x3 biểu diễn cho mô-men quán tính của Quadcopter. Trong nghiên cứu này, Quadcopter có hình dạng đối xứng, do đó chỉ tồn tại các giá trị I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} . Hệ phương trình (5) được viết chi tiết như sau:

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\tau_\phi}{I_{xx}} \\ \frac{\tau_\theta}{I_{yy}} \\ \frac{\tau_\psi}{I_{zz}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{xx}} q r \\ \frac{I_{zz}-I_{xx}}{I_{yy}} p r \\ \frac{I_{xx}-I_{yy}}{I_{zz}} p q \end{bmatrix} \quad (6)$$

Ở đây, mô-men xoắn $\boldsymbol{\tau}$ theo các trục được xác định như sau:

$$\tau_\phi = l \cdot k \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2) \quad (7)$$

$$\tau_\theta = l \cdot k \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 - \omega_4^2) \quad (8)$$

$$\tau_\psi = b \cdot (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \quad (9)$$

Trong đó, ω_i là tốc độ quay của từng motor.

2.3. Áp dụng phương pháp số Beeman giải mô hình động lực học Quadcopter

Hệ phương trình mô tả động lực học Quadcopter được giải bằng phương pháp tính toán số Beeman [13], [14]. Đây là phương pháp được áp dụng chủ yếu cho các bài toán xác định quỹ đạo của hệ cơ học có quán tính lớn. Kết quả tính toán được kiểm chứng với kết quả thu được từ phương pháp Runge-Kutta bậc 4 (RK4) [15], [17] nhằm đánh giá hiệu suất và độ chính xác.

Để phân tích mô hình động lực học Quadcopter, các hệ phương trình vi phân (2), (4) và (6) được biến đổi về dạng sau:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t) \quad (10)$$

Trong đó, vector trạng thái $\mathbf{X}$ của Quadcopter được định nghĩa như sau:

$$\mathbf{X} = [x \ y \ z \ v_x \ v_y \ v_z \ \phi \ \theta \ \psi \ p \ q \ r]^T \quad (11)$$

Khi giải các bài toán động lực học bằng phương pháp số, việc rời rạc hóa theo thời gian là cần thiết để có thể mô phỏng hệ thống theo miền thời gian. Phương pháp rời rạc hóa sử dụng các bước thời gian hữu hạn dt để cập nhật trạng thái của hệ thống từ thời điểm n sang $n+1$. Phương pháp Beeman cập nhật trạng thái $\mathbf{X}$ tại bước $n+1$ dựa theo gia tốc hiện tại và quá khứ như sau:

$$x_{n+1} = x_n + v_n dt + \frac{1}{6} (4a_n - a_{n-1}) dt^2 \quad (12)$$

$$v_{n+1}^* = v_n + \frac{1}{2} (3a_n - a_{n-1}) dt \quad (13)$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{6} (2a_{n+1} + 5a_n - a_{n-1}) dt \quad (14)$$

Trong đó, x_n , v_n và a_n lần lượt là vị trí, vận tốc và gia tốc tại thời điểm n , v_{n+1}^* là vận tốc trung gian dự đoán trạng thái hệ thống tại $n+1$, là trạng thái trung gian, giá trị này được sử dụng để tính a_{n+1} và v_{n+1} theo biểu thức (14).

Phương pháp Beeman có độ chính xác bậc $O(dt^3)$ đối với vị trí và $O(dt^2)$ đối với vận tốc. Sử dụng các biểu thức (12-14) để giải hệ phương trình vi phân (4) với a_n là vector gia tốc tại thời điểm n tương ứng với $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$. v_n và x_n lần lượt là vector vận tốc (v_x, v_y, v_z) và vector tọa độ (x, y, z) được mô tả trong biểu thức (4) tại thời điểm n . Để giải hai hệ phương trình vi phân bậc một (2) và

(6), ta sử dụng biểu thức (13) và (14). Trong hệ phương trình vi phân (6), a_n là $(\dot{p}, \dot{q}, \dot{r})$ và v_n là (p, q, r) tại thời điểm n . Tương tự trong hệ phương trình vi phân (2), a_n chính là $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ và v_n là (ϕ, θ, ψ) tại thời điểm n .

Hệ phương trình vi phân được giải số bằng các hàm code MATLAB do nhóm nghiên cứu viết.

Quy trình giải hệ phương trình vi phân lần lượt như sau:

- Giải phương trình (6) để xác định (p, q, r) .
- Giải phương trình (2) để xác định (ϕ, θ, ψ) .
- Giải phương trình (4) để xác định tọa độ (x, y, z) .

3. Kết quả và thảo luận

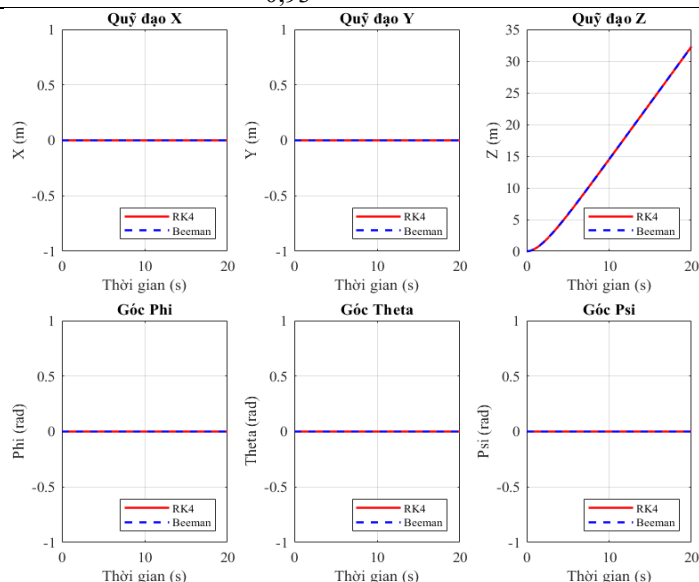
Để đánh giá khả năng áp dụng phương pháp Beeman trong khảo sát đáp ứng động lực học Quadcopter, các kịch bản bay đơn giản được tính toán với dữ liệu đầu vào được liệt kê như trong Bảng 2. Tốc độ quay động cơ được giả thiết đã biết. Kết quả thu được bằng phương pháp Beeman được so sánh với kết quả của phương pháp Runge-Kutta bậc 4. Các hàm tính thời gian trong code MATLAB được sử dụng để thực hiện đo thời gian từ lúc bắt đầu thực hiện hàm tính toán cho đến khi kết thúc, giúp so sánh hiệu quả xử lý của phương pháp RK4 và Beeman.

Bảng 2. Tốc độ quay motor của Quadcopter sử dụng trong mô phỏng

Kịch bản bay	ω_1 (RPM)	ω_2 (RPM)	ω_3 (RPM)	ω_4 (RPM)
Cất cánh thẳng đứng	6207,18	6207,18	6207,18	6207,18
Bay tiến	6350,28	6350,28	6350,38	6350,38

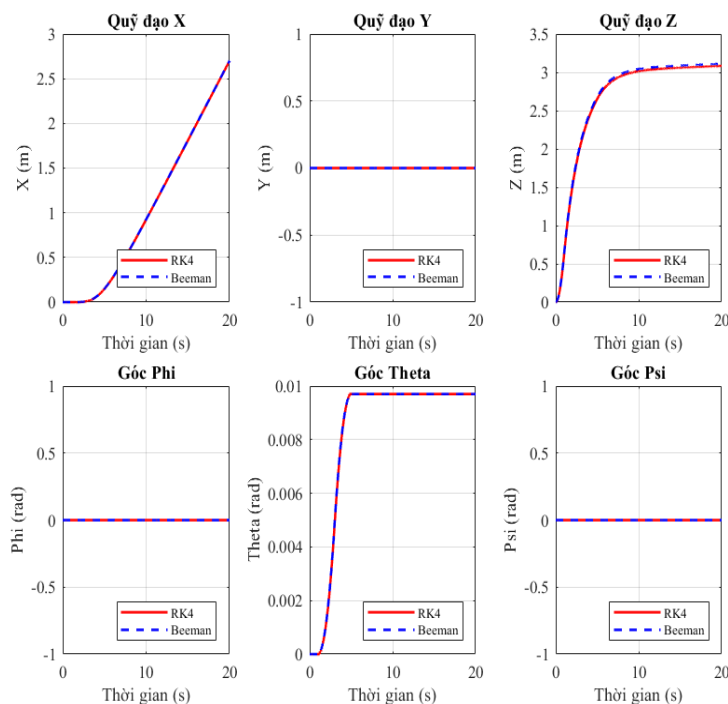
Bảng 3. So sánh kết quả hai kịch bản bay đơn giản

Kịch bản bay	Sai số $(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{Beeman-RK4}{RK4} \times 100\%)$	Tốc độ xử lý $(\frac{T_{Beeman}}{T_{RK4}} \times 100\%)$
Cất cánh thẳng đứng	0,5	73,75
Bay tiến	0,93	61,54



Hình 4. Quỹ đạo cất cánh thẳng đứng

Hình 4 biểu diễn quỹ đạo bay thẳng đứng của Quadcopter. Kết quả chỉ ra rằng Quadcopter cất cánh thẳng đứng 33 m trong thời gian 20 giây, khi tốc độ quay của bốn cánh quạt bằng nhau và lực nâng lớn hơn trọng lượng. Kết quả tính toán bằng phương pháp Beeman được biểu diễn bằng đường cong đứt nét, cho thấy tương đồng với kết quả tính toán bằng phương pháp RK4, được biểu diễn bằng đường cong liền nét.



Hình 5. Quỹ đạo bay tiến

Hình 5 biểu diễn quỹ đạo bay theo trục X của Quadcopter. Kết quả chỉ ra rằng Quadcopter thay đổi tư thế trong 5 giây đầu tiên và di chuyển theo trục X 2,55 m trong 15 giây tiếp theo. Kết quả tính toán bằng phương pháp Beeman được biểu diễn bằng đường cong đứt nét, cho thấy tương đồng với kết quả tính toán bằng phương pháp RK4, được biểu diễn bằng đường cong liền nét. Bảng 3 cho thấy quỹ đạo mô phỏng của hai phương pháp Beeman và RK4 sai lệch không nhiều. Tuy nhiên, phương pháp Beeman có thời gian xử lý tốt hơn chỉ bằng 61,54% tới 73,75% so với phương pháp RK4. Độ sai lệch của hai phương pháp là 0,5% trong trường hợp cất cánh thẳng đứng, và 0,93% khi bay tiến. Điều này chứng tỏ phương pháp Beeman cho kết quả tính toán đáng tin cậy trong giải bài toán động lực học Quadcopter.

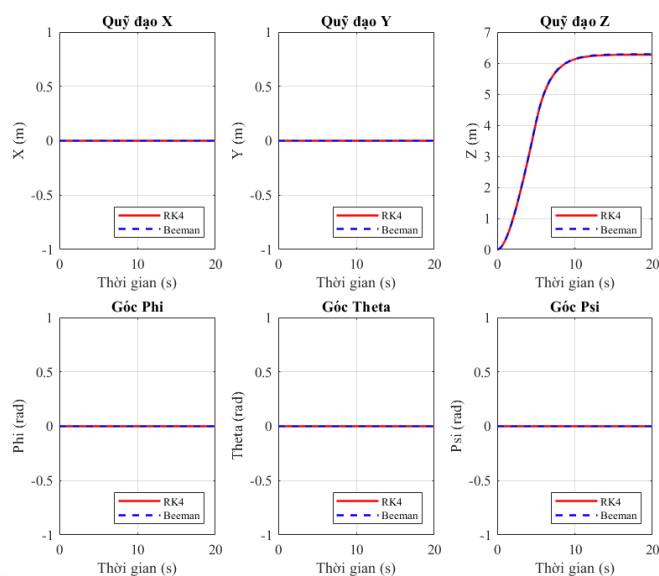
Để đánh giá tính linh hoạt và hiệu quả của phương pháp Beeman, các kịch bản bay phức tạp khi lực nâng thay đổi trong quá trình bay được mô phỏng như mô tả trong Bảng 4.

Bảng 4. Các kịch bản bay của Quadcopter

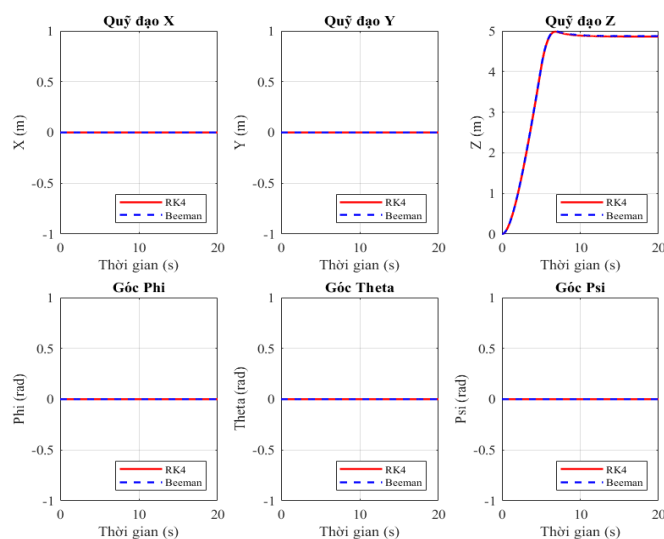
Thời gian (s)	Kịch bản 1	Kịch bản 2
0 → 5	$F_z > mg$	$F_z > mg$
5 → 10	$F_z = mg$	$F_z < mg$
10+	$F_z = mg$	$F_z = mg$

Hình 6 biểu diễn quỹ đạo bay của Quadcopter theo kịch bản 1. Kết quả cho thấy trong 10 giây đầu tiên, Quadcopter bay thẳng đứng 6,3 m, sau đó sẽ ổn định độ cao. Mặc dù, trong khoảng thời gian 5 tới 10 giây, lực nâng bằng trọng lực nhưng Quadcopter vẫn bay lên, điều này do lực quán tính gây ra. Tương tự, trong kịch bản 2, Hình 7 cho thấy Quadcopter bay lên 5 m trong khoảng 8 giây đầu tiên, sau đó hạ thấp độ cao xuống 4,8 m trong 5 giây tiếp theo, sau đó giữ ổn định độ cao. Kết quả tính toán bằng phương pháp Beeman được biểu diễn bằng đường cong đứt nét, cho thấy tương đồng với kết quả tính toán bằng phương pháp RK4, được biểu diễn bằng đường cong liền nét.

Bảng 5 cho thấy phương pháp Beeman và RK4 có kết quả quỹ đạo gần như trùng khớp với sai số 0,59% cho kịch bản 1 và 0,63% cho kịch bản 2. Tuy nhiên, phương pháp Beeman có thời gian xử lý nhanh hơn đáng kể, bằng 66,67% tới 68,09% so với phương pháp RK4 cho hai kịch bản bay phức tạp. Điều này cho thấy phương pháp Beeman là lựa chọn tốt khi cần hiệu suất tính toán cao mà vẫn đảm bảo độ chính xác.



Hình 6. Kịch bản 1 - cất cánh và cân bằng



Hình 7. Kịch bản 2 - cất cánh, hạ thấp và cân bằng

Bảng 5. So sánh kết quả hai kịch bản bay phức tạp

Kịch bản	Sai số $(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{Beeman - RK4}{RK4} \times 100\%)$	Tốc độ xử lý $(\frac{T_{Beeman}}{T_{RK4}} \times 100\%)$
Kịch bản 1	0,59	68,09
Kịch bản 2	0,63	66,67

Dựa trên kết quả mô phỏng cho thấy sai số giữa phương pháp Beeman và phương pháp RK4 luôn nhỏ hơn 1%. Tuy nhiên, phương pháp Beeman luôn có thời gian xử lý nhanh hơn đáng kể so với phương pháp RK4, chỉ bằng 61,54% tới 73,75% so với phương pháp RK4, đặc biệt rõ rệt trong các kịch bản bay phức tạp. Điều này cho thấy phương pháp Beeman phù hợp với các bài toán mô phỏng quỹ đạo Quadcopter, cho kết quả có độ chính xác cao và thời gian tính toán thấp hơn so với phương pháp RK4. Phương pháp này giúp tối ưu hiệu suất khi xử lý quỹ đạo Quadcopter trong thời gian thực hoặc trên hệ thống tài nguyên hạn chế.

4. Kết luận

Nghiên cứu đã xây dựng mô hình động lực học Quadcopter dựa trên phương pháp Newton-Euler và giải hệ phương trình bằng thuật toán Beeman so sánh với Runge-Kutta bậc 4. Các mô phỏng cho thấy Beeman đạt độ chính xác cao với sai số dưới 1% so với phương pháp RK4, đồng thời rút ngắn thời gian xử lý xuống còn 61,54%–73,75%. Phương pháp này xử lý hiệu quả trong các tình huống động lực học phức tạp, đảm bảo ổn định quỹ đạo bay và phù hợp cho các ứng dụng thời gian thực hoặc hệ thống hạn chế tài nguyên tính toán. Trong tương lai, nhóm nghiên cứu sẽ tiếp tục tối ưu thuật toán và triển khai thử nghiệm trên mô hình phần cứng thực tế.

Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Công nghệ, Đại học Quốc gia Hà Nội theo đề tài mã số CN24.17.

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

- [1] M. A. Hashemi, H. R. Momeni, and M. J. Yazdanpanah, "Mathematical modeling and control law design for 1DOF quadcopter flight dynamics," *Proceedings of IEEE Conference on Control and Automation*, 2016, pp. 315-320.
- [2] Y. Wang, K. P. Lee, and J. H. Park, "Model predictive control for quadcopters with almost global trajectory tracking guarantees," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 32, no. 1, pp. 142-155, 2024.
- [3] T. S. Kim and R. T. Jones, "Trajectory tracking of a quadcopter using fuzzy-PD controller," *Journal of Aerospace Engineering*, vol. 35, no. 7, pp. 987-1002, 2022.
- [4] J. K. Patel, S. S. Sharma, and P. Gupta, "Position and trajectory control of a quadcopter using optimization algorithm," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 60, no. 2, pp. 1025-1037, 2024.
- [5] P. R. Evans and M. T. Lee, "Trajectory control of quadcopter in Matlab simulation environment," *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2025, pp. 1248-1253.
- [6] W. Zhou, D. Nair, O. Gunawan, T. van Kessel, and H. F. Hamann, "A testing platform for on-drone computation," *Proceedings of the 33rd IEEE International Conference on Computer Design (ICCD)*, 2015, pp. 472-475.
- [7] A. R. Smith and D. J. Brown, "Trajectory analysis of quadcopter UAV using software in the loop simulation," *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 98, no. 3, pp. 475-490, 2023.
- [8] T. Luukkonen, "Modelling and control of quadcopter," Independent Research Project in Applied Mathematics, School of Science, Mat-2.4108, Espoo, 2011.
- [9] T. Oktay and O. Kose, "Dynamic modeling and simulation of quadrotor for different flight conditions," *European Journal of Science and Technology*, no. 15, pp. 132-142, 2019.
- [10] A. Nagaty, S. Saeedi, C. Thibault, M. Seto, and H. Li, "Control and navigation framework for quadrotor helicopters," *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, vol. 70, no. 1-4, pp. 1-12, 2013.
- [11] A. Tayebi and S. McGilvray, "Attitude stabilization of a four-rotor aerial robot," in *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 2, pp. 1216-1221, 2005.
- [12] H. M. Elkholy and M. K. Habib, "Dynamic modeling and control techniques for a quadrotor," *Handbook of Research on Advancements in Robotics and Mechatronics*, IGI Global, 2015, doi: 10.4018/978-1-4666-7387-8.ch014.
- [13] M. A. Braun, *Numerical Methods for Physics*, Cambridge University Press, 2008.
- [14] M. Newman, *Computational Physics: Problem Solving with Python*, Pearson Education, 2012.
- [15] M. A. Demba, N. Senu, and F. Ismail, "Trigonometrically-fitted explicit four-stage fourth-order Runge-Kutta-Nyström method for the solution of initial value problems with oscillatory behavior," *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 12, no. 1, pp. 67-80, 2016.
- [16] V. Singh, "Estimation of Error in Runge-Kutta Fourth Order Method," *Journal of Emerging Technologies and Innovative Research (JETIR)*, vol. 5, no. 2, 2018, Art. no. b1590.
- [17] V. Chauhan and P. K. Srivastava, "Computational Techniques Based on Runge-Kutta Method of Various Order and Type for Solving Differential Equations," *International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences*, vol. 4, no. 2, pp. 375-386, 2019.