CALCULATION OF TORSIONAL STIFFNESS FOR CORRUGATED CORE CARDBOARD PANELS BY ANALYTICAL METHOD AND NUMERICAL SIMULATION

Dao Lien Tien, Duong Pham Tuong Minh, Luong Viet Dung*
TNU - University of Technology

ARTICLE INFO

Received: 13/4/2025
Revised: 13/5/2025
Published: 13/5/2025

KEYWORDS

Torsional Stiffness
Corrugated
Simualation
Finite element
Moment of inertia

ABSTRACT

The torsional stiffness of corrugated core board is an important mechanical property that represents the ability to resist torsional deformation when subjected to the twisting force of the packaging during use. However, accurately calculating torsional stiffness still faces many challenges. This paper analyzes the torsional stiffness calculation process to identify existing difficulties, thereby proposing a method for determining the torsional stiffness of corrugated core board using analysis and numerical simulations. The analytical expression for calculating torsional stiffness is developed to allow fast and flexible calculations during the design process. A 3D numerical model is created in Abaqus software, accurately reproducing the geometry of the corrugated core layer to simulate the torsional behavior under torque effects. Comparison of the results between the two methods shows small deviations, confirming their accuracy. The research results provide a useful basis for the design, evaluation, and optimization of corrugated board structures in applications requiring torsional resistance.

TÍNH TOÁN ĐỘ CỨNG XOẮN CHO TẤM CARTON LÕI LƯỢN SÓNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH VÀ MÔ PHỎNG SỐ

Đào Liên Tiến, Dương Phạm Tường Minh, Lương Việt Dũng*
Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp – ĐH Thái Nguyên

THÔNG TIN BÀI BÁO

Ngày nhận bài: 13/4/2025
Ngày hoàn thiện: 13/5/2025
Ngày đăng: 13/5/2025

TỪ KHÓA

Độ cứng xoắn
Tấm lượn sóng
Mô phỏng số
Phần tử hữu hạn
Mô men quán tính

TÓM TẮT

Độ cứng xoắn của tấm carton lõi lượn sóng là một đặc tính cơ học quan trọng, thể hiện khả năng chống lại sự biến dạng xoắn khi chịu tác động lực gây xoắn của bao bì trong quá trình sử dụng. Tuy nhiên, việc tính toán chính xác được độ cứng xoắn còn gặp phải nhiều thách thức. Bài báo này tập trung vào việc phân tích quy trình tính toán độ cứng xoắn để xác định vấn đề khó khăn đang tồn tại, từ đó đề xuất phương pháp xác định độ cứng xoắn của tấm carton có cấu trúc lõi lượn sóng bằng giải tích và mô phỏng số. Biểu thức giải tích tính toán độ cứng xoắn được xây dựng cho phép tính toán nhanh chóng và linh hoạt trong quá trình thiết kế. Mô hình số 3D được xây dựng trong phần mềm Abaqus, tái hiện chính xác hình học của lớp lõi lượn sóng để mô phỏng hành vi chịu xoắn dưới tác dụng của mô men xoắn. So sánh giữa hai phương pháp cho thấy sự sai lệch nhỏ, khẳng định tính chính xác của hai phương pháp. Kết quả nghiên cứu là cơ sở hữu ích cho việc thiết kế, đánh giá và tối ưu hóa kết cấu tấm carton trong các ứng dụng đòi hỏi khả năng chịu xoắn.

DOI: https://doi.org/10.34238/tnu-jst.12561

* Corresponding author. *Email: luongvietdung@tnut.edu.vn*

1. Giới thiệu

Độ cứng xoắn là một đại lượng cơ học biểu thị khả năng của vật liệu hoặc cấu kiện chịu được sự biến dạng do mô men xoắn tác động. Trong thực tế, ý nghĩa của độ cứng xoắn rất quan trọng trong nhiều lĩnh vực kỹ thuật và thiết kế như trong thiết kế cơ khí: độ cứng xoắn đảm bảo rằng các trục có thể chịu được mô men xoắn truyền qua mà không bị biến dạng lớn, gây mất ổn định hoặc hư hỏng. Các bộ phận như trục, khớp nối cần có độ cứng xoắn đủ lớn để hoạt động ổn định, tránh rung lắc và đảm bảo tuổi thọ. Trong ngành ô tô, khung gầm cần có độ cứng xoắn cao để đảm bảo an toàn, giảm biến dạng trong khi xe chịu lực vặn xoắn khi vào cua hoặc trên địa hình gồ ghề. Hệ thống lái và treo: Các thành phần phải đủ cứng để đảm bảo phản hồi nhanh và chính xác. Trong xây dựng, dầm cầu phải có độ cứng xoắn phù hợp để chịu được các lực không đối xứng, ví dụ khi xe tải nặng đi qua. Độ cứng xoắn giúp đảm bảo tính ổn định của công trình trước các tác động ngoài, như gió hay động đất. Tóm lại, độ cứng xoắn là một yếu tố quan trọng trong việc đảm bảo độ bền, hiệu suất và tính an toàn của các cấu kiện hoặc hệ thống cơ học trong thực tế.

Lý thuyết xoắn đàn hồi đầu tiên được Saint-Venant phát triển vào năm 1855 là một trong những nền tảng của cơ học vật rắn biến dạng. Đây là lý thuyết phân tích ứng xử của các thanh có mặt cắt ngang bất kỳ khi chịu mô-men xoắn [1]. Nghiên cứu về độ cứng xoắn của các tiết diện không tròn thường tập trung vào việc phân tích khả năng chống lại biến dạng xoắn của các tiết diện có hình dạng phi tròn, như tiết diện chữ nhật, hình elip, chữ I, chữ H, chữ T, hoặc các dạng phức tạp khác [2]. Cho đến nay đã có nhiều nghiên cứu đề xuất các phương pháp tính toán độ cứng xoắn của các chi tiết, kết cấu khác nhau. Phân tích xoắn thanh composite với các lớp vật liệu khác nhau được thực hiện nhờ giải pháp phần tử biên (B.E.) cho bài toán xoắn Saint-Venant với thanh trụ composite có tiết diện bất kỳ. Thanh composite gồm vật liệu ma trận hình trụ bao quanh các tạp chất với mô đun cắt khác nhau, liên kết chặt chẽ. Bài toán được thiết lập theo hàm xoắn qua bài toán giá trị biên kiểu Neumann, đồng thời đánh giá độ cứng xoắn và ứng suất cắt. Các ví dụ số được so sánh với kết quả phân tích hoặc số khác, trong đó trường hợp tiết diện đồng nhất có hoặc không có lỗ là đặc biệt. Hiệu quả của phương pháp B.E. được chứng minh rõ ràng [3]. Đối với những kết cấu phức tạp, phương pháp phần tử hữu hạn được sử dụng để tính toán độ cứng xoắn như trong đánh giá độ cứng khung gầm xe ô tô [4]; mô phỏng các chi tiết có kết cấu vách mỏng [5]; tăng cường độ cứng xoắn của khung xe ô tô nhẹ bằng cách tối ưu hóa vật liệu và hình dạng [6]; đánh giá tính chất xoắn của vật liệu in 3D cho các cấu trúc mới [7] – [9]. Một lý thuyết mới để tính độ cứng xoắn được đề xuất trong nghiên cứu của Wenjuan Lou và cộng sự [10], tuy nhiên chỉ áp dụng cho bó dây dẫn. Trong nghiên cứu của Tomasz Garbowski và cộng sự [11], một phương trình phân tích mô tả độ cứng xoắn của tấm có tính đến độ cứng cắt ngang trong các tấm sandwich. Độ cắt ngang trở thành một thành phần quan trọng nếu tấm hoặc vỏ được phân tích theo chiều dày. Bên cạnh đó, một số nghiên cứu về tấm carton lõi sóng cũng đề cập đến vấn đề độ cứng xoắn [12] - [14].

Trong những nghiên cứu liên quan đến độ cứng xoắn đã công bố chưa có nghiên cứu nào về việc tính độ cứng xoắn cho kết cấu tấm sandwich lõi sóng. Đặc biệt là tấm carton lõi lượn sóng. Nghiên cứu này nhằm xây dựng mô hình lý thuyết để tính toán độ cứng xoắn dựa trên đặc tính hình học và tính chất cơ học của kết tấm carton. Nghiên cứu này phát triển mô hình mô phỏng số để phân tích ứng xử của tấm carton khi chịu mô men xoắn, xác định độ cứng xoắn tương ứng; từ đó hỗ trợ thiết kế và tối ưu hóa cấu trúc carton trong thiết kế bao bì và các kết cấu tấm sandwich.

2. Phương pháp nghiên cứu

Độ cứng xoắn (GJ) là một đại lượng cơ học liên quan đến mô-men xoắn và góc xoắn trên một đơn vị chiều dài. Biểu thức tính độ cứng xoắn như sau:

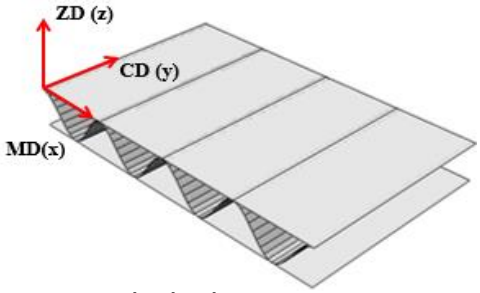
$$GJ = \frac{T}{\theta / L} \tag{1}$$

Trong đó:

G- Mô-đun trượt của vật liệu (Pa hoặc N/m²)

J- Mô-men quán tính cực của diện tích tiết diện ngang (m^4)
T- Mô-men xoắn tác dụng lên vật liệu (N.m)
θ- Góc xoắn (radian)
L-Chiều dài mẫu thử (m)

Đối với tấm carton lõi lượn sóng, do lõi có dạng hình học khá phức tạp (Hình 1) nên việc tính mô-men quán tính J trở nên khó khăn, đòi hỏi hiểu biết về tính chất vật liệu, hình học của lõi lượn sóng và phương pháp tính toán. Cơ sở tính toán được trình bày trong phần sau.

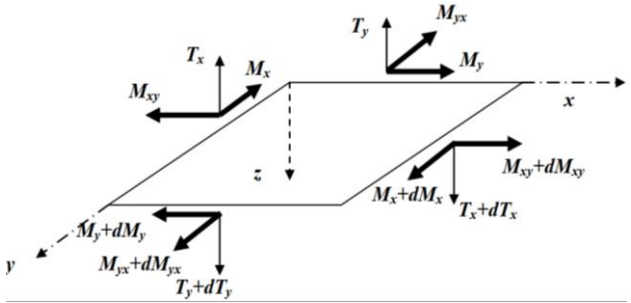


Hình 1. *Kết cấu tấm carton lõi lượn sóng*

2.1. Cơ sở tính toán độ cứng xoắn

Xét một tấm phẳng chịu tải trọng phân bố theo phương thẳng đứng q. Nội lực và mô men nội lực trên mặt phẳng trung bình biểu diễn như Hình 2. Phương trình cân bằng cho tấm:

$$M_{x,xx} + M_{yx,xy} + M_{y,yy} - M_{xy,xy} = -q \tag{2}$$



Hình 2. *Nội lực và mô men nội lực trên mặt trung bình của tấm*

Trong tấm phẳng trực hướng ứng suất phẳng, mô men uốn và mô men xoắn được tính theo các biểu thức (3):

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= E_x'\varepsilon_x + E''\varepsilon_y = -z(E_x' w_{,xx} + E'' w_{,yy}) \\
\sigma_y &= E_y'\varepsilon_y + E''\varepsilon_x = -z(E_y' w_{,yy} + E'' w_{,xx}) \\
\tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = -2Gz w_{,xy}
\end{aligned} \tag{3}$$

với $E_x' = \dfrac{E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}}$; $E_y' = \dfrac{E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}}$; $E'' = \dfrac{E_x\nu_{yx}}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}}$; $E_x\nu_{yx} = E_y\nu_{xy}$

$$\begin{aligned}
M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = -D_x w_{,xx} - D_1 w_{,yy} \\
M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz = -D_y w_{,yy} - D_1 w_{,xx} \\
M_{xy} &= -\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = 2D_{xy} w_{,xy}
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\text{với} \quad D_x = \frac{E_x' h^3}{12} \quad ; \quad D_y = \frac{E_y' h^3}{12} \quad ; \quad D_1 = \frac{E'' h^3}{12} \quad ; \quad D_{xy} = \frac{Gh^3}{12}$$

Trong đó, E_x và E_y là các mô đun đàn hồi, G là mô đun trượt, ν_{xy} là hệ số Poisson và h là chiều dày tấm. Thay biểu thức (4) vào (2), ta được:

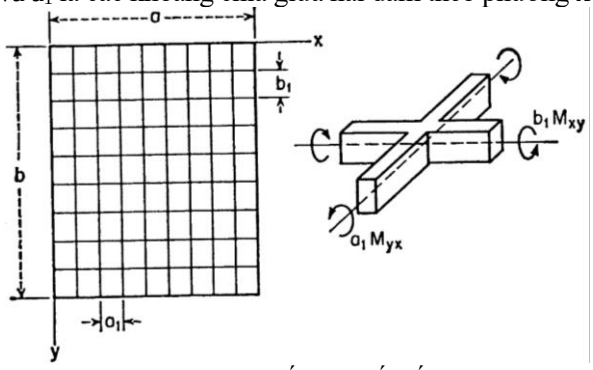
$$D_x w_{,xxxx} + 2(D_1 + D_{xy}) w_{,xxyy} + D_y w_{,yyyy} = q \tag{5}$$

Trong đó: D_1 là ảnh hưởng của hệ số Poisson mô men uốn đến độ cong xoắn, D_{xy} là độ cứng xoắn của tấm.

Đối với tấm carton lõi sóng do có cấu trúc rỗng với các khoang xen kẽ, phân bố ứng suất và biến dạng theo phương vuông góc với mặt phẳng tấm là phi tuyến. Vì vậy, không thể áp dụng trực tiếp phép tích phân trong công thức (4) như đối với tấm nhiều lớp thông thường để xác định độ cứng. Để giải quyết vấn đề này, một mô hình tương đương nhằm xác định độ cứng xoắn đã được đề xuất [8]. Mô hình này được xây dựng dưới dạng lưới thanh, cho phép xét đến sự khác biệt về độ cứng xoắn theo hai phương chính x và y (Hình 3). Trên cơ sở lý thuyết dầm cổ điển, độ cứng xoắn của từng thanh được tính theo chiều dài đơn vị tương ứng:

$$M_{xy} = \frac{Gj_x}{b_1}\theta_{x,x} = \frac{Gj_x}{b_1} w_{,yx} \quad ; \quad M_{yx} = \frac{Gj_y}{a_1}\theta_{y,y} = -\frac{Gj_y}{a_1} w_{,xy} \quad ; \quad w_{,yx} = w_{,xy} \tag{6}$$

Trong đó, G_{jx} là độ cứng xoắn theo phương x, G_{jy} là độ cứng xoắn của dầm theo phương y, $\theta_{x,x}$ và $\theta_{y,y}$ biểu thị tỷ lệ xoắn quanh x và y, -2w'xy là độ cong xoắn, M_{xy} và M_{yx} là các mô men xoắn tính trên một đơn vị chiều dài, b_1 và a_1 là các khoảng chia giữa hai dầm theo phương x và y tương ứng.



Hình 3. *Mô phỏng xoắn cho kết cấu dạng lưới*

Thay biểu thức (6) vào (2), ta có:

$$\frac{E_x i_x}{b_1} w_{,xxxx} + \left(\frac{Gj_x}{b_1} + \frac{Gj_y}{a_1} \right) w_{,xxyy} + \frac{E_y i_y}{a_1} w_{,yyyy} = q \tag{7}$$

Trong đó, $E_x i_x$, $E_y i_y$ là độ cứng uốn của dầm theo phương x, và phương y tương ứng.

Từ biểu thức (5) và (7), độ cứng xoắn của tấm tương đương thu được:

$$D_{xy} = \frac{1}{4}\left(\frac{Gj_x}{b_1} + \frac{Gj_y}{a_1} \right) = \frac{1}{4}\left(\frac{GJ_x}{b} + \frac{GJ_y}{a} \right) \tag{8}$$

Trong đó, GJ_x và GJ_y là tổng các độ cứng xoắn của tất cả các dầm theo phương x và theo phương y.

Từ sự kết hợp của hai thanh chịu xoắn, ta có hệ số 1/4. Nếu góc xoắn θ_x quanh trục x trong tấm, ta thu được một tỷ lệ xoắn $\theta_{x,x} = w_{,yx} = \theta_x/L$ quanh trục x và một tỷ lệ xoắn ngang bằng $\theta_{y,y} = -w_{,xy} = -\theta_{x/L}$ quanh trục y. Công của mô men ngoại lực được tính bằng nội năng của biến dạng [15]:

$$M_t \theta_x = \int_0^L Gj_x \left(\theta_{x,x}\right)^2 dx + \int_0^B Gj_y \left(\theta_{y,y}\right)^2 dy = \int_A \left(\frac{GJ_x}{B} + \frac{GJ_y}{L} \right) \left(w_{,xy} \right)^2 dA \tag{9}$$

$$\text{Với} \quad Gj_x = \sum_i \left(Gj_x\right)_i, Gj_y = \sum_j \left(Gj_y\right)_j$$

Trong tấm đồng nhất tương đương, phương trình năng lượng có thể được viết như sau:

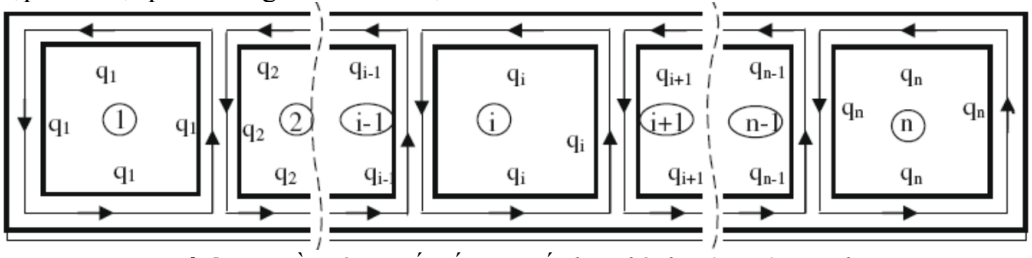
$$M_t\theta_x = \int_A D_{xy}\kappa_{xy}^2 dA = \int_A D_{xy}\left(-2w_{,xy}\right)^2 dA \quad (10)$$

Trong đó, $(-2w_{,xy}) = \kappa_{xy}$ là độ cong xoắn của tấm, nó được chia thành hai tỷ lệ bằng nhau của xoắn dầm ($w_{,yx} = \theta_{x,x}$ và $w_{,xy} = -\theta_{y,y}$). Từ biểu thức (9) và (10), thu được công thức để tính toán độ cứng xoắn của tấm tương đương:

$$D_{xy} = \frac{1}{4}\left(\frac{GJ_x}{B} + \frac{GJ_y}{L}\right) \quad (11)$$

2.2. Tính toán độ cứng xoắn cho tấm carton lõi lượn sóng

Các nghiên cứu [12] và [13] đã đề xuất phương pháp tính gần đúng độ cứng xoắn của tấm carton 3D. Trên mặt cắt CD, mô-men xoắn quanh trục y có thể được mô hình hóa tương đương với một thanh thành mỏng có nhiều ô kín (Hình 4). Dựa trên lý thuyết Bredt, các phương trình sau được thiết lập cho một phần bao gồm *n* ô đơn vị.



Hình 4. *Luồng ứng suất cắt trên tiết diện thành mỏng của n ô đơn vị*

$$\begin{aligned}
&q_1\oint_1 \frac{ds}{e} - q_2\int_{1,2}\frac{ds}{e} = \frac{2M_t}{J}S_1\\
&-q_1\int_{2,1}\frac{ds}{e} + q_2\oint_2\frac{ds}{e} - q_3\int_{2,3}\frac{ds}{e} = \frac{2M_t}{J}S_2....\\
&-q_{n-1}\int_{n,n-1}\frac{ds}{e} + q_n\oint_n\frac{ds}{e} = \frac{2M_t}{J}S_n
\end{aligned} \quad (12)$$

Trong đó, J là mômen quán tính xoắn của tiết diện ô đơn vị; q_i đại diện cho luồng ứng suất cắt chưa xác định trong thành phần tử ô; M_t là mômen xoắn tác dụng lên tiết diện; e là độ dày thành ô; s là chiều dài của đường cong trung bình trong thành ô; và S_i là diện tích mặt phẳng được giới hạn bởi đường cong trung bình s của ô đơn vị.

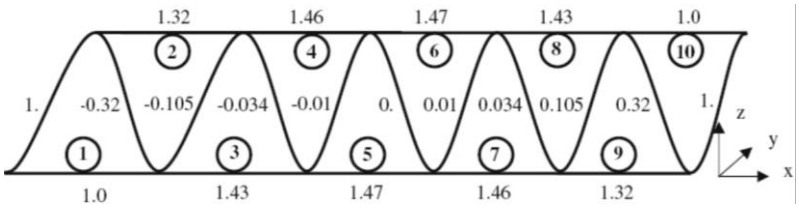
Giải các phương trình (12) (sử dụng $2M_t/J = 1$), thu được luồng ứng suất cắt $\overline{q_i}$. Từ đó mô men xoắn quán tính J và luồng ứng suất cắt q_i được tính theo công thức sau:

$$J = 4\sum_{i=1}^{n}\overline{q_i}F_i\ ;\ \ q_i = \overline{q_i}\frac{2M_t}{J} \quad (13)$$

Sử dụng hệ phương trình tuyến tính (12), có thể giải được bài toán xoắn đối với một tấm carton có 10 ô đơn vị. Từ đó, phương trình (13) được áp dụng để tính toán giá trị J và q_i. Các luồng ứng suất cắt xuất hiện trong các thành bên trong rất nhỏ so với ở các thành bên ngoài. Khi số lượng ô đơn vị tăng lên, các luồng ứng suất cắt trong vách bên trong trở nên gần như không đáng kể (xem Hình 5). Trên thực tế, một tấm carton lõi sóng thường bao gồm hơn 50 ô, với ứng suất phân bố gần như bằng không trên đa số các vách của lõi. Do đó, khi tính độ cứng xoắn bằng công thức Bredt cho tiết diện của một ô có thể bỏ qua những vách này:

$$J = \frac{4s^2}{\oint_s \frac{ds}{e}} \quad (14) \qquad GJ = \frac{4S^2}{\oint_s \frac{ds}{Ge}} = \frac{4L^2h^2}{\frac{L}{G^{(1)}e_1} + \frac{L}{G^{(3)}e_3} + \frac{2L}{G^{(2)}e_2}} \approx \frac{4Lh^2G^{(1)}e_1G^{(3)}e_3}{G^{(1)}e_1 + G^{(3)}e_3}(l << L) \quad (15)$$

trong đó h là chiều cao của tấm carton, L là chiều dài của tấm và l là một nửa chiều dài hình sin của lõi.

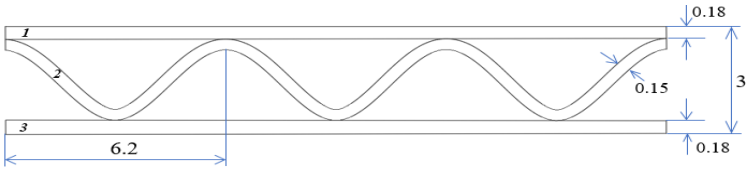


Hình 5. *Phân bố ứng suất tiếp trên một mặt cắt có 10 khoang rỗng*

Theo hướng MD, việc tìm lời giải cho bài toán xoắn gặp nhiều khó khăn. Các phân tích bằng phương pháp phần tử hữu hạn cho thấy mặt cắt MD là mặt cắt hở, có độ cứng xoắn dầm nhỏ đáng kể so với độ cứng xoắn trên mặt cắt CD. Vì vậy, để đơn giản hóa bài toán xoắn vốn rất phức tạp, có thể xem như bỏ qua độ cứng xoắn theo phương MD:

$$D_{xy} = \frac{1}{4}\left(\frac{GJ_{MD}}{B} + \frac{GJ_{CD}}{L}\right) \approx \frac{GJ_{CD}}{4L} \quad (16)$$

3. Kết quả và thảo luận



Hình 6. *Kích thước và hình dáng hình học của tấm carton lõi lượn sóng*

Xét một tấm carton lõi sóng có chiều dài L = 400 mm và chiều rộng B = 200 mm. Tiết diện mặt cắt ngang như Hình 6. Thông số vật liệu của các lớp giấy như trong Bảng 1. Điều kiện biên của tấm carton lõi sóng chịu xoắn như trong Hình 7. Mô hình được xây dựng trong phần mềm Abaqus gồm 97250 phần tử S4R với 95324 nút.

Bảng 1. *Các thuộc tính đàn hồi của giấy*

Lớp giấy	E_x (MPa)	E_y (MPa)	ν_{xy}	G_{xy} (MPa)	E_0
1,3	2350,2	879,91	0,0829	1047,2	91,45
2	1120,4	615,85	0,0717	301,05	80,31

Mô men xoắn bên ngoài $M_{total\text{-}x}$ cần thiết để có được góc áp đặt $\theta_x = \pi/20$, nó cho mômen xoắn bên trong trên một đơn vị chiều rộng:

$$-M_{xy} = \frac{M_{total-x}}{B} \quad (17)$$

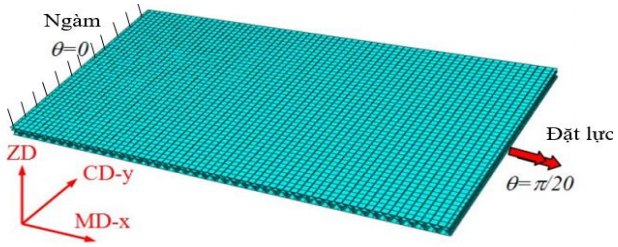
Một tấm khi xoắn quanh x hoặc xoắn quanh y, dẫn đến tốc độ xoắn giống hệt nhau và mômen xoắn giống hệt nhau theo cả hai hướng:

$$\theta_{y,y} = -\theta_{x,x}; M_{yx} = -M_{xy} = \frac{M_{total-x}}{B} \quad (18)$$

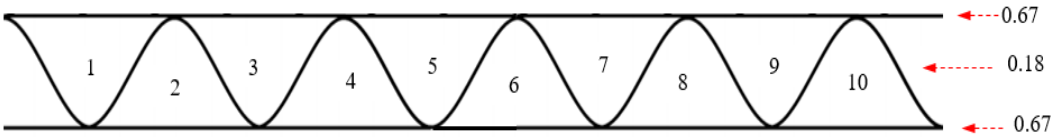
Nghiên cứu đã chứng minh rằng độ cứng xoắn GJ_{MD} nhỏ hơn nhiều so với GJ_{CD} và do đó không đáng kể. Trên thực tế, GJ_{CD} là vật liệu chống lại mômen xoắn bên ngoài xung quanh x:

$$M_{yx}L = GJ_{CD}\theta_{y,y} \Rightarrow \frac{GJ_{CD}}{L} = -\frac{M_{total-x}}{B\theta_{x,x}} \quad (19)$$

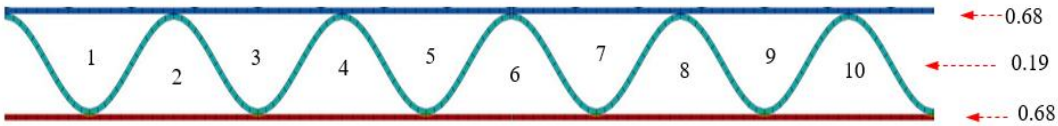
Luồng ứng suất đi trong các lớp của tấm tính toán được bằng giải giải tích thể hiện trong Hình 8, bằng mô phỏng số thể hiện như trong Hình 9. Các kết quả nhận được cho thấy luồng ứng suất tính toán bằng mô phỏng số và lý thuyết có sự tương đồng rất tốt. Từ đó tính toán được độ cứng xoắn như trong Bảng 2. Đối với trường hợp áp dụng góc xoắn quanh trục y, thu được kết quả tương tự (Bảng 3). Độ cứng xoắn của tấm dưới các mômen bên ngoài $M_{total\text{-}x\ (MD)}$ hoặc $M_{total\text{-}y\ (CD)}$ gần như giống hệt nhau. Điều này được giải thích là do sự liên kết xoắn giữa hai hướng và cung cấp độ cứng xoắn độc đáo của tấm.



Hình 7. *Điều kiện biên của tấm chịu xoắn*



Hình 8. *Luồng ứng suất tiếp trong các lớp thu được bằng lý thuyết Bredt*



Hình 9. *Luồng ứng suất tiếp trong các lớp thu được bằng mô phỏng 3D Abaqus*

Bảng 2. *Độ cứng xoắn thu được bằng 2 phương pháp ($\theta_x = \pi/20$)*

Bredt D_{33} (N.mm)	Abaqus-3D (N.mm)	Error (%)
$\frac{GJ_{MD}}{L} = 4D_{33}$	$\frac{M_{total-x}}{B\theta_{x.x}}$	
8192,35	8271,77	0,96

Bảng 3. *Độ cứng xoắn thu được bằng 2 phương pháp ($\theta_y = \pi/20$)*

Bredt D_{33} (N.mm)	Abaqus-3D (N.mm)	Error (%)
$\frac{GJ_{CD}}{L} = 4D_{33}$	$\frac{M_{total-y}}{B\theta_{y.y}}$	
8192,35	8320,43	1,56

4. Kết luận

Độ cứng xoắn là một đặc tính cơ học quan trọng, đóng vai trò thiết yếu trong việc đánh giá độ bền và tính ổn định của tấm carton lõi lượn sóng, đặc biệt trong các ứng dụng bao bì yêu cầu khả năng chịu lực tốt trong quá trình vận chuyển và sử dụng. Tuy nhiên, việc tính toán chính xác độ cứng xoắn đối với tấm carton lõi lượn sóng còn gặp nhiều thách thức do tính chất phức tạp của cấu trúc vật liệu. Bài báo đã phân tích các khó khăn trong quá trình tính toán, từ đó đề xuất một phương

pháp giải tích để xác định mô men quán tính, đồng thời sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để kiểm chứng độ chính xác của phương pháp giải tích. Phương pháp đề xuất dựa trên mô hình dạng lưới để tính xoắn cho kết cấu khoang rỗng như tấm carton lõi sóng. Đồng thời đã ứng dụng sự phân bố luồng ứng suất trong các thanh thành mỏng vào tính toán độ cứng xoắn. Kết quả nghiên cứu không chỉ cung cấp một cách tiếp cận hiệu quả hơn trong việc tính toán độ cứng xoắn mà còn mở ra hướng cải tiến thiết kế tấm carton đáp ứng tốt hơn các yêu cầu thực tiễn.

Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Bộ Giáo dục và Đào tạo Việt Nam (mã số B2023-TNA-20).

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

[1] M. H. Sadd, *ELASTICITY: Theory, Applications, and Numerics*. Elsevier, 2004, doi: 10.1016/B978-0-12-605811-6.X5000-3.
[2] V. D. Silva, *Mechanics and strength of materials*, Springer, 2006, doi: 10.1007/3-540-30813-X.
[3] J. T. Katsikadelis and E. J. Sapountzakis, "Torsion of Composite Bars by Boundary Element Method," *J. Eng. Mech.*, vol. 111, no. 9, pp. 1197–1210, 1985, doi: 10.1061/(asce)0733-9399(1985)111:9(1197).
[4] L. F. F. M. Barbosa, J. E. Tomazini, M. S. Martins, L. R. R. Q. Moreira, M. Y. T. Hori, and L. F. S. Silva, "Finite Element and Experimental Analysis of the Torsional Stiffness of a Chassis of a Baja SAE Prototype," *SAE Tech. Pap.*, vol. Part F1270, October, 2016, doi: 10.4271/2016-36-0124.
[5] T. H. Gebre, V. V. Galishnikova, and E. V. Lebed, "Experimental and numerical investigation of thin-walled I-section beam under bending and torsion," *Struct. Mech. Eng. Constr. Build.*, vol. 18, no. 4, pp. 341–350, 2022, doi: 10.22363/1815-5235-2022-18-4-341-350.
[6] T. Homsnit *et al.*, "Optimizing stiffness and lightweight design of composite monocoque sandwich structure for electric heavy quadricycle," *Lat. Am. J. Solids Struct.*, vol. 20, no. 3, 2023, doi: 10.1590/1679-78257537.
[7] Z. Zhang, L. Liu, F. Usta, and Y. Chen, "Exploring Tunable Torsional Mechanical Properties of 3D-Printed Tubular Metamaterials," *Adv. Eng. Mater.*, vol. 26, no. 9, 2024, doi: 10.1002/adem.202301876.
[8] M. Husain, R. Singh, and B. S. Pabla, "Investigating the torsional characteristics of 3D printed polyvinylidene fluoride composite," *J. Thermoplast. Compos. Mater.*, vol. 37, no. 7, pp. 2464–2478, 2024, doi: 10.1177/08927057231216746.
[9] H. Sadaghian *et al.*, "Preliminary Insight Into Torsion of Additively-Manufactured Polylactic Acid (PLA)-Based Polymers," *Exp. Mech.*, 2024, doi: 10.1007/s11340-024-01105-6.
[10] W. Lou, C. Yang, W. Zhou, and Z. Huang, "A New Theory for Calculating the Torsional Stiffness of Multi-Bundled Conductors," *IEEE Trans. Power Deliv.*, 2024, doi: 10.1109/TPWRD.2024.3435761.
[11] T. Garbowski, T. Gajewski, and J. K. Grabski, "Torsional and transversal stiffness of orthotropic sandwich panels," *Materials (Basel).*, vol. 13, no. 21, pp. 1–18, 2020, doi: 10.3390/ma13215016.
[12] T. Garbowski and A. Knitter-Piątkowska, "Analytical Determination of the Bending Stiffness of a Five-Layer Corrugated Cardboard with Imperfections," *Materials (Basel).*, vol. 15, no. 2, 2022, doi: 10.3390/ma15020663.
[13] F. I. Boaca *et al.*, "Mechanical Analysis of Corrugated Cardboard Subjected to Shear Stresses," *J. Compos. Sci.*, vol. 8, no. 10, 2024, doi: 10.3390/jcs8100404.
[14] D. Mrówczyński and T. Garbowski, "Influence of Imperfections on the Effective Stiffness of Multilayer Corrugated Board," *Materials (Basel).*, vol. 16, no. 3, 2023, doi: 10.3390/ma16031295.
[15] R. V. Dijk, J. C. Sterk, D. Sgorbani, and F. Van Keulen, "Lateral Deformation of Plastic Bottles: Experiments, Simulations and Prevention," *Packag. Technol. Sci.*, vol. 11, no. 3, pp. 91–117, 1998, doi: 10.1002/(SICI)1099-1522(199805/06)11:3<91::AID-PTS420>3.0.CO;2-K.
[16] Y. Q. G. A. D. Hammou, P. T. M. Duong, B. Abbès, and M. Makhlouf, "Finite element simulation with a homogenization model cardboard packaging," *Mech. Ind.*, vol. 13, no. 3, pp. 175–184, 2012.
[17] B. Abbès and Y. Q. Guo, "Analytic homogenization for torsion of orthotropic sandwich plates: Application to corrugated cardboard," *Compos. Struct.*, vol. 92, no. 3, pp. 699–706, 2010, doi: 10.1016/j.compstruct.2009.09.020.