

SOME REMARKS ON THE DIMENSION OF SUBGROUPS IN A DESCENDING AND ASCENDING SERIES OF SOLVABLE ALGEBRAIC GROUPS

Ngo Thi Ngoan^{1*}, Nguyen Quoc Linh², Nguyen Quoc Thang³, Pham Duc Hiep⁴

¹Thuongmai University, ²VNU University of Science, ³Institute of Mathematics - VAST, ⁴VNU University of Education

ARTICLE INFO		ABSTRACT
Received:	28/5/2025	In the case the linear algebraic groups under consideration are connected nilpotent or solvable algebraic groups, there were some well known estimations on dimension of subgroups in the descending derived series and ascending central series for connected solvable or nilpotent algebraic groups, which are very useful when one uses mathematical induction to investigate the structure of the given linear algebraic groups. Our aim in this note is to investigate to what extent one can extend these estimates to the case of non- connected linear algebraic solvable or nilpotent groups. Our methods use, besides the standard results from the theory of linear algebraic groups, some generalizations of a Schur's lemma and a Baer's lemma to non-connected linear algebraic groups. Our results are some generalizations of these estimates to the case of not necessarily connected nilpotent or solvable algebraic groups. Besides, we also give some applications and examples, in order to show that some of our results are optimal. The main results of the paper bring out interesting characteristics of solvable or nilpotent algebraic groups defined over an algebraically closed field.
Revised:	21/8/2025	
Published:	21/8/2025	
KEYWORDS		
Nilpotent groups		
Solvable groups		
Dimension		
Ascending series		
Descending series		

MỘT SỐ NHẬN XÉT VỀ SỐ CHIỀU CỦA CÁC NHÓM CON TRONG MỘT DÂY GIẢM VÀ DÂY TĂNG CỦA CÁC NHÓM ĐẠI SỐ GIẢI ĐƯỢC

Ngo Thi Ngoan^{1*}, Nguyễn Quốc Linh², Nguyễn Quốc Thắng³, Phạm Đức Hiệp⁴

¹Trường Đại học Thương mại, ²Trường Đại học Khoa học tự nhiên – ĐHQG Hà Nội

³Viện Toán học – Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, ⁴Trường Đại học Giáo dục - ĐHQG Hà Nội

THÔNG TIN BÀI BÁO		TÓM TẮT
Ngày nhận bài:	28/5/2025	Trong trường hợp nhóm đại số tuyến tính đang được xem xét là nhóm đại số lũy linh hay là giải được, người ta biết đến một số đánh giá quen thuộc về số chiều cho các nhóm con trong dãy dẫn xuất giảm và dãy tâm tăng của nhóm đại số lũy linh hay giải được liên thông. Những đánh giá này rất có ích khi ta sử dụng phương pháp quy nạp để nghiên cứu cấu trúc của các nhóm đại số tuyến tính đã cho. Mục tiêu của chúng tôi trong bài báo này là xem xét việc có thể mở rộng các đánh giá này cho trường hợp nhóm đại số tuyến tính lũy linh hay giải được không liên thông. Các phương pháp của chúng tôi sử dụng, ngoài các kết quả căn bản của lý thuyết nhóm đại số tuyến tính là mở rộng một bổ đề của Schur và một bổ đề của Baer cho nhóm đại số tuyến tính không liên thông. Các kết quả của chúng tôi là một số mở rộng các đánh giá trên cho trường hợp nhóm đại số lũy linh hay giải được không nhất thiết là liên thông. Bên cạnh đó, chúng tôi cũng đưa ra một số ứng dụng và ví dụ để chứng minh rằng một số kết quả của chúng tôi là tối ưu. Các kết quả chính của bài báo đem lại những đặc điểm thú vị về các nhóm lũy linh, nhóm giải được xác định trên một trường đóng đại số.
Ngày hoàn thiện:	21/8/2025	
Ngày đăng:	21/8/2025	
TỪ KHÓA		
Nhóm lũy linh		
Nhóm giải được		
Chiều		
Dãy tăng		
Dãy giảm		

DOI: <https://doi.org/10.34238/tnu-jst.12905>

* Corresponding author. Email: ngothingoan@tmu.edu.vn

1. Mở đầu

Cho G là một nhóm đại số tuyến tính giải được, xác định trên một trường đóng đại số k . Ký hiệu $\mathcal{D}^i G$, $\mathcal{C}^i G$ lần lượt là dãy dẫn xuất và dãy tâm giảm của G . Ta xét dãy dẫn xuất $\mathcal{D}^i G$, $i \geq 0$, và dãy tâm giảm $\mathcal{C}^i G$, $i \geq 0$ của G được định nghĩa tương ứng như sau

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^0 G &= \mathcal{C}^0 G = G, \mathcal{C}G = \mathcal{D}G = [G, G], \\ \mathcal{D}^i G &:= \mathcal{D}(\mathcal{D}^{i-1} G), \mathcal{C}^i G := [\mathcal{C}^{i-1} G, G], i \geq 1,\end{aligned}$$

(xem trong các tài liệu [1] - [4]). Một nhóm đại số tuyến tính cũng là một đa tạp đại số affine, và các khái niệm về chiều (ký hiệu là $\dim$) hay đối chiều (ký hiệu là codim) mà ta sẽ xét sau đây là được hiểu theo nghĩa của đa tạp đại số thông thường (xem [1] - [4]). Cũng vậy, ta nói rằng G là nhóm đại số giải được (tương ứng, lũy linh) nếu dãy dẫn xuất $\mathcal{D}^i G$ (tương ứng, dãy tâm giảm) là dừng tại nhóm con tầm thường $\{1\}$, tức tồn tại chỉ số i sao cho $\mathcal{D}^i G = \{1\}$ (tương ứng, $\mathcal{C}^i G = \{1\}$). Với một nhóm đại số tuyến tính lũy linh (hoặc giải được) G , ta ký hiệu $n = n(G)$ là bậc lũy linh (tương ứng, bậc giải được) của dãy tâm giảm (tương ứng, dãy dẫn xuất) của G , tức là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $\mathcal{C}^n G$ (tương ứng, $\mathcal{D}^n G$) là nhóm con tầm thường $\{1\}$. Để nghiên cứu các tính chất khác nhau của G , trong trường hợp G là liên thông, người ta thường sử dụng phương pháp quy nạp theo số chiều của G , dựa trên các kết quả nổi tiếng sau đây.

Định lý 1.1

(1) ([3, sec. 17.3]) Cho G là một nhóm đại số tuyến tính liên thông. Nếu $\dim \mathcal{D}^i G > 0$ thì

$$\dim \mathcal{D}^i G > \dim \mathcal{D}^{i+1} G. \quad (1)$$

(2) Nếu G là một nhóm đại số liên thông lũy linh và $\dim \mathcal{C}^i G > 0$ thì

$$\dim \mathcal{C}^i G > \dim \mathcal{C}^{i+1} G. \quad (2)$$

Chứng minh. (1) Ta chứng minh bằng quy nạp theo i . Nếu $i = 0$, thì $\dim \mathcal{D}^0 G = \dim G > 0$, và nếu G là giao hoán thì $\dim \mathcal{D}G = 0$. Nếu G không là giao hoán, thì bởi vì $\dim G > 0$, ta có $G \neq \mathcal{D}G$, và vì G là liên thông, nên ta có $\dim G > \dim \mathcal{D}G$ và khẳng định đúng cho trường hợp $i = 0$. Nếu $i > 0$ và $\dim \mathcal{D}^i G > 0$, theo trên ta có $\dim \mathcal{D}^i G > \dim \mathcal{D}(\mathcal{D}^i G) = \dim \mathcal{D}^{i+1} G$, và khẳng định đúng đối với trường hợp $i > 0$.

(2) Giả sử ngược lại là $\dim \mathcal{C}^i G = \dim \mathcal{C}^{i+1} G$. Khi đó, hai nhóm con này đều là liên thông, đóng và chuẩn tắc của G nên chúng bằng nhau:

$$\mathcal{C}^i G = \mathcal{C}^{i+1} G.$$

Vì vậy $\mathcal{C}^i G = \mathcal{C}^j G$ nên $\dim(\mathcal{C}^i G) = \dim(\mathcal{C}^j G) > 0$ với mọi $j > i$, điều này mâu thuẫn với giả thiết G là lũy linh. Do đó ta có $\dim \mathcal{C}^i G > \dim \mathcal{C}^{i+1} G$. ■

Tuy nhiên, khi nhóm G không là liên thông, theo hiểu biết hiện tại của chúng tôi, dường như chưa có các kết quả tương tự như trên trong các tài liệu đã xuất bản, đồng thời chưa rõ các kết quả trên có còn đúng cho trường hợp G không liên thông hay không.

Một số nghiên cứu gần đây về các nhóm đại số lũy linh liên thông của các tác giả S. Gelaki, Y. Peterzil và S. Starchenko cho những kết quả khá thú vị như: Nghiên cứu sự xoắn nhóm đại số lũy linh liên thông trong [5]; đại số Hopf của nhóm lũy linh liên thông trong [5], [6]; Nghiên cứu tác động của nhóm lũy linh liên thông và các quỹ đạo của nó trong [7]. Bên cạnh đó, các công trình của J.-P. Labesse ([8]), công trình của P. N. Achar và cộng sự ([9]) cho chúng ta biết đến những kết quả rất tốt về nhóm đại số reductive không liên thông. Các công trình kể trên, hoặc đề cập đến các nhóm đại số reductive không liên thông, hoặc nhóm đại số lũy linh liên thông, chưa có bài báo nào đề cập đến đối tượng nghiên cứu là các nhóm lũy linh và không liên thông.

Mục tiêu chính trong bài báo này là khảo sát sự mở rộng của Định lý 1.1 sang trường hợp các nhóm lũy linh hoặc giải được không liên thông và chỉ ra rằng kết quả trên còn đúng với các nhóm giải được với một số điều kiện nhất định, đồng thời cũng đưa ra một vài ứng dụng của chúng.

Chúng tôi giả sử rằng tất cả các nhóm được xét ở đây đều là nhóm đại số tuyến tính (theo nghĩa trong [1], [3]), tức là các nhóm affine trơn xác định và có kiểu hữu hạn trên một trường.

Ta ký hiệu G° là thành phần liên thông (của đơn vị) của một nhóm đại số G , và $Z(G)$ là tâm của G .

2. Định lý chính

Mục tiêu của mục này là chứng minh mở rộng sau đây của Định lý 1.1 sang các trường hợp nhóm không liên thông.

Định lý 2.1. Cho G là một nhóm đại số tuyến tính với chiều dương.

(1) Nếu G là lũy linh và $\dim \mathcal{D}^i G > 0$ thì

$$\dim \mathcal{D}^i G > \dim \mathcal{D}^{i+1} G.$$

(2) Giả sử G là một nhóm đại số tam giác hóa, giải được và giả sử rằng G chứa một tuyến con không tầm thường. Khi đó, nếu $\dim \mathcal{D}^i G > 0$ thì $\dim \mathcal{D}^i G > \dim \mathcal{D}^{i+1} G$.

Trước tiên ta cần một số bổ đề sau

Bổ đề 2.2. Cho G là một nhóm đại số tuyến tính và $Z(G)$ ký hiệu tâm của G .

Nếu $[G : Z(G)] < \infty$ (nghĩa là nhóm thương tương ứng là hữu hạn), thì $\mathcal{D}G$ là hữu hạn.

Bổ đề 2.3. Cho G như trong Bổ đề 2.2 và A, B là các nhóm con đóng, chuẩn tắc của G . Nếu với mọi k -đại số giao hoán R , ta có tập $\{[a, b] : a \in A(R), b \in B(R)\}$ là hữu hạn, thì nhóm con giao hoán tử $[A, B]$ là hữu hạn.

Bổ đề 2.4. Cho G là một nhóm đại số tuyến tính, và A, B là các nhóm con đóng của G . Khi đó ta có đẳng thức sau

$$[A, B]^\circ = [A^\circ, B][A, B^\circ].$$

Bổ đề 2.3 là mở rộng của một định lý của Baer và Bổ đề 2.2 là mở rộng của một định lý của Schur trong lý thuyết nhóm cổ điển (xem trong [10]). Các chứng minh của Bổ đề 2.2 và Bổ đề 2.3 theo cách tương tự như trong trường hợp các nhóm tổng quát (có thể tham khảo trong [1, Cha. 1, Sec. 2.4], [3, Sec. 17.1]).

Chứng minh của Bổ đề 2.4 cũng vậy, được dựa trên Bổ đề 2.2 và Bổ đề 2.3, và được suy ra từ chứng minh của Mệnh đề 17.2 trong [3]. Thật vậy, bằng cách sử dụng cùng một phương pháp chứng minh như trong [3, Prop. 17.2, (a)], ta có thể chỉ ra rằng nhóm $C := [A^\circ, B][A, B^\circ]$ là một nhóm con đóng liên thông của $[A, B]$. Lập luận như trong chứng minh của [3, Prop. 17.2, (b)] ta cũng suy ra được C có chỉ số hữu hạn trong $[A, B]$ (tức là nhóm thương tương ứng là hữu hạn).

Chứng minh Định lý 2.1. (1) Nếu G liên thông, ta có kết quả đã được khẳng định. Giả sử G không liên thông. Để chứng minh ý (1) của định lý, ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp $i = 0$, và sử dụng quy nạp theo i . Bây giờ, ta xét G là một nhóm đại số lũy linh với $\dim G > 0$. Giả sử ngược lại rằng

$$(\mathcal{D}G)^\circ = G^\circ.$$

Khi đó, theo nhận xét trên, ta có

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}^1 G)^\circ &= (\mathcal{D}G)^\circ = [G, G]^\circ \\ &= [G^\circ, G][G, G^\circ] \\ &= G^\circ. \end{aligned}$$

Từ đó ta suy ra

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}^2 G)^\circ &= [\mathcal{D}G, G]^\circ \\ &= [(\mathcal{D}G)^\circ, G][\mathcal{D}G, G^\circ] \\ &= [G, G^\circ][\mathcal{D}G, G^\circ] \\ &= [G, G^\circ] = G^\circ \end{aligned}$$

và tiếp tục như vậy. Vì G là lũy linh, quá trình này sẽ dừng lại tại $\{1\}$, do đó G° là tầm thường và G là hữu hạn, điều này mâu thuẫn với giả thiết của G .

(2) Xét một biểu diễn ma trận $G \hookrightarrow \text{GL}(V)$, trong đó G có dạng tam giác trên trong cơ sở $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ của V , với $m = \dim V$. Khi đó, $[G, G]$ là nhóm lũy đơn (do vậy cũng là lũy linh). Từ đó, nếu $i \geq 1$, thì chứng minh được suy ra từ phần (1). Giả sử rằng $i = 0$. Đặt V_j là không gian con của V sinh bởi $\{v_1, \dots, v_j\}$. Vì G bảo toàn V_j , nên có hai biểu diễn tự nhiên liên kết với G :

$$\phi_j : G \rightarrow \text{GL}(V_j), \psi_j : G \rightarrow \text{GL}(V/V_j).$$

Ta sử dụng quy nạp theo m để chỉ ra rằng nếu $\dim G > 0$ thì $\dim G > \dim \mathcal{D}G$.

Nếu $m = 1$ thì G là giao hoán và khẳng định là đúng, ta giả sử khẳng định đúng với mọi số nguyên nhỏ hơn m , với $m > 1$.

Ta gọi T là một tuyến con cực đại của G có chiều > 0 , nó chính là một nhóm con đường chéo của G đối với cơ sở đã chọn ở trên. Bởi vì $\dim T > 0$, nên rõ ràng là $j < m$ sao cho hoặc là $\dim \phi_j(T) > 0$, hoặc $\dim \psi_j(T) > 0$. Đặc biệt, $\dim \phi_j(G) > 0$ hoặc $\dim \psi_j(G) > 0$, tương ứng. Giả sử ta đang trong trường hợp đầu (trường hợp còn lại lập luận tương tự). Theo giả thiết quy nạp, $\dim \phi_j(G) > \dim \mathcal{D}\phi_j(G)$, do đó ta có

$$\begin{aligned} \dim G &= \dim \phi_j(G) + \dim \text{Ker } \phi_j \\ &> \dim \mathcal{D}\phi_j(G) + \dim \text{Ker } \phi_j \\ &\geq \dim \mathcal{D}\phi_j(G) + \dim (\text{Ker } \phi_j \cap \mathcal{D}G) \\ &= \dim \mathcal{D}G. \end{aligned}$$

■

Chúng tôi sẽ chỉ ra sau đây Định lý 2.1 (2) không còn đúng đối với các nhóm giải được không lũy linh nếu không có giả thiết sự tồn tại của một tuyến con không tầm thường trong G .

Ví dụ 2.5. Ta ký hiệu $L(\cdot)$ là đại số Lie của $(\cdot)$, $\mathfrak{g} := L(G)$. Khi đó tồn tại một nhóm đại số giải được không liên thông G sao cho $\dim G = \dim \mathcal{D}G > 0$ và $L(\mathcal{D}G) \neq \mathcal{D}\mathfrak{g}$.

Giả sử $\text{char } k \neq 2$, và gọi $s = \text{diag}(s_1, s_2) \in \text{GL}_2$, trong đó các s_i là căn của đơn vị, thỏa mãn $(s_1/s_2) \neq \pm 1$ và F là nhóm con hữu hạn của GL_2 được sinh bởi s . Ký hiệu $N = \text{U}_2$ là nhóm lũy đơn tam giác trên của GL_2 , $\mathfrak{n} := L(N)$. Khi đó, ta dễ dàng kiểm tra được rằng đối với nhóm $G := FN$ ta có:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^1 G &= [FN, FN] = N, \\ \mathcal{C}^2 G &= [G, \mathcal{C}^1 G] = [FN, N] = N, \\ \mathcal{C}^3 G &= [G, \mathcal{C}^2 G] = [FN, N] = N \end{aligned}$$

và trong trường hợp tổng quát, với mọi $j \geq 1$, $\mathcal{C}^j G = N$. Tương tự, ta cũng có

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^1 G &= N, \\ \mathcal{D}^2 G &= [N, N] = \{1\}, \end{aligned}$$

vì N là giao hoán. Do đó G là nhóm giải được nhưng không lũy linh vì $\mathcal{C}^i G = N$ for $i \geq 1$. Ta cũng có $G^\circ = N$, vì vậy $\dim G = \dim \mathcal{C}G$. Từ đó $L(\mathcal{D}G) = L(N) = \mathfrak{n}$, trong khi

$$\mathcal{D}\mathfrak{g} = \mathcal{D}L(N) = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \neq \mathfrak{n},$$

với $\mathfrak{n} = L(\text{U}_2)$, là đại số các ma trận tam giác trên với đường chéo bằng 0.

3. Áp dụng vào việc xác định số chiều của các nhóm con trong các dãy giảm và dãy tăng

Chúng tôi muốn khảo sát sự biến thiên của số chiều của các nhóm con trong một dãy giảm và dãy tăng đối với các nhóm đại số giải được. Như một số ứng dụng, chúng tôi có các kết quả sau đây:

Định lý 3.1. Cho G là một nhóm đại số tuyến tính giải được. Nếu $\dim G > 0$ thì tồn tại một dãy giảm những nhóm con đóng, chuẩn tắc $G = G_0 > G_1 > \dots > G_{n-1} > G_n = \{1\}$ của G , sao cho với mọi i ta có

$$\text{codim}_{G_i} G_{i+1} = \dim G_i - \dim G_{i+1} \leq 1.$$

Nếu G là liên thông thì ta có thể chọn các nhóm con G_i cũng liên thông.

Chú ý 3.2. (1) Trong trường hợp G là lũy đơn, một kết quả mạnh hơn đã được chứng minh trong [11, Prop. 1] (cũng có thể xem trong [12]). Cụ thể, các nhóm G_i còn có thể được chọn sao cho chúng đều xác định trên k , là trường xác định của G .

(2) Nếu G là một nhóm đại số liên thông giải được, thì một kết quả mạnh hơn vẫn đúng (xem [3, Thm. 19.3 (a)]).

Chứng minh Định lý 3.1. Trước hết, ta giả sử rằng G là lũy linh. Khi đó, theo Định lý 2.1, ta có $\dim G > \dim DG$. Xét dãy khớp:

$$1 \rightarrow DG \rightarrow G \rightarrow G/DG \rightarrow 1,$$

và sử dụng $\dim G/DG > 0$, chúng ta đưa được về việc chứng minh khẳng định đối với nhóm thương $H := G/DG$, đây là nhóm giao hoán. Để thuận tiện, giả sử G (và cả H) được xác định trên một trường đại số đóng đại số, vì thế theo kết quả trong [2, Cha. 4, Sec. 3.1] (hoặc xem trong [13]), H có phân tích thành tích trực tiếp $H = H_s \times H_u$ trong đó H_s (tương ứng H_u) là nhóm con đóng kiểu nhân tính (tương ứng nhóm con lũy đơn). Vì kết quả tương ứng luôn đúng với trường hợp các nhóm lũy đơn (theo [11, Prop. 1]), và cũng là hiển nhiên đối với các nhóm đại số tuyến tính kiểu nhân tính (ví dụ, dựa vào tương ứng $1-1$ giữa nhóm này và nhóm đặc trưng của chúng, [3, Sec.16.2]), nên định lý được chứng minh trong trường hợp này. Thực ra, ta có bất đẳng thức $\dim G_i - \dim G_{i+1} = 1$ trong trường hợp này (điều kiện đối chiều 1).

Bây giờ giả sử rằng G là nhóm giải được. Ta sẽ sử dụng phương pháp quy nạp theo tổng của số chiều và độ dài giải được $t(G) := \dim G + n(G)$ của G . Nếu $n = 1$ thì hoặc là G là nhóm hữu hạn (và ta có ngay điều cần khẳng định), hoặc là G là nhóm giao hoán (và khi đó ta quay lại trường hợp trước). Giả sử rằng khẳng định là đúng với mọi nhóm giải được G_1 với $t(G_1) < t(G)$ và $t(G) > 1$. Khi đó $G \neq DG$ (vì G là giải được), $\dim G \geq \dim DG$, $n(G) > n(DG)$, vì vậy ta có $t(DG) < t(G)$. Do đó, tồn tại một dãy con chuẩn giảm dần

$$DG = L_0 > L_1 = D(DG) > \dots > L_s = \{1\}$$

những nhóm con đóng của DG thỏa mãn điều kiện đối chiều 1. Nếu $\dim G > \dim DG$ thì ta áp dụng giả thiết quy nạp đối với G/DG , ta có một dãy con chuẩn tắc giảm dần

$$G/DG = K_0 > \dots > K_r = \{1\},$$

thỏa mãn điều kiện đối chiều 1. Khi đó, bằng cách lấy ảnh ngược của dãy này qua phép chiếu $p: G \rightarrow G/DG$ ta nhận được một dãy cần tìm

$$G = G_0 > \dots > G_{r+s} = \{1\},$$

thỏa mãn điều kiện đối chiều 1 cho G . Nếu $\dim G = \dim DG$, thì ở bước cuối này ta có $\dim G - \dim DG = 0$, vẫn thỏa mãn điều kiện đối chiều 1 cho G , vì vậy ta có điều phải chứng minh. ■

Các kết quả sau đây là mở rộng của các kết quả cổ điển đối với nhóm đại số lũy linh liên thông sang trường hợp các nhóm đại số lũy linh (có thể bỏ điều kiện liên thông) (xem [2, Cha. 4, Sec. 4.1], [3, Sec. 17.4]). Kết quả đầu tiên có thể tham khảo trong [3, Sec. 17, Excer. 5], tại đây chúng tôi đưa ra một chứng minh để kết quả thêm hoàn chỉnh.

Mệnh đề 3.3. Cho G là một nhóm đại số lũy linh. Nếu $\dim G > 0$ thì

(a) $\dim Z(G) > 0$.

(b) Nếu H là một nhóm con đóng thực sự của G thì $\dim H < \dim N_G(H)$. Do đó, nếu $\text{codim}(H) = 1$ và G là liên thông thì H là chuẩn tắc trong G .

Chứng minh. (a) Cho G là một nhóm lũy linh có độ dài n , tức là $C^{n-1}G \neq \{1\}$, and $C^n G = \{1\}$. Khi đó $C^{n-1}G < Z(G)$. Ta có thể giả sử rằng G không là giao hoán, vì vậy $n \geq 2$. Giả sử ngược lại, $\dim Z(G) = 0$ với G như trong định lý. Do đó $\dim C^{n-1}G = 0$ suy ra $(C^{n-1}G)^\circ = \{1\}$. Ta có

$$C^{n-1}G = [C^{n-2}G, G],$$

vì vậy, lập luận tương tự như trong chứng minh của Định lý 2.1, ta có

$$\begin{aligned}\{1\} &= (\mathcal{C}^{n-1}G)^\circ \\ &= [\mathcal{C}^{n-2}G, G]^\circ \\ &= [(\mathcal{C}^{n-2}G)^\circ, G][\mathcal{C}^{n-2}G, G^\circ].\end{aligned}$$

Vì vậy

$$\{1\} = [(\mathcal{C}^{n-2}G)^\circ, G] = [\mathcal{C}^{n-2}G, G^\circ],$$

do đó ta có $(\mathcal{C}^{n-2}G)^\circ < Z(G)$. Về sau là hữu hạn theo giả thiết, vì vậy $(\mathcal{C}^{n-2}G)^\circ = 1$. Áp dụng giả thiết quy nạp, ta có $(\mathcal{C}^tG)^\circ = 1$, với mọi $t < n$, suy ra mâu thuẫn.

(b) Lập luận tương tự như trong trường hợp cổ điển, bằng cách sử dụng (a). Ta xét các trường hợp sau đây. Nếu $Z(G) < H$, thì theo (a), $\dim Z(G) > 0$, vì vậy $\dim H/Z(G) < \dim H$. Ta cũng có những dãy khớp sau

$$1 \rightarrow Z(G) \rightarrow G \rightarrow G/Z(G) \rightarrow 1,$$

$$1 \rightarrow Z(G) \rightarrow H \rightarrow H/Z(G) \rightarrow 1,$$

ngoài ra, cũng có một toàn cầu $N_G(H) \rightarrow N_{G/Z(G)}(H/Z(G))$ với hạt nhân $Z(G)$. Theo giả thiết quy nạp, ta có

$$\dim N_{G/Z(G)}(H/Z(G)) > \dim (H/Z(G)),$$

vậy nên cũng có

$$\dim (N_G(H)/Z(G)) > \dim (H/Z(G)),$$

nghĩa là, $\dim N_G(H) > \dim H$.

Nếu $Z(G) \not< H$ thì ta xét nhóm con $H < ZH < N_G(H)$. Rõ ràng ta có $N_G(H) = N_G(Z(G)H)$ và theo lập luận trên, ta có

$$\dim (Z(G)H) < \dim (N_G(Z(G)H)),$$

vì vậy ta suy ra $\dim N_G(H) > \dim Z(G)H > \dim H$.

Bây giờ, nếu $\text{codim}(H) = 1$ thì ta có $\dim (N_G(H)) = \dim (G)$, và do G là liên thông, ta có $G = N_G(H)$, tức là H là nhóm con chuẩn tắc. ■

Chú ý 3.4. Cho G là một nhóm đại số lũy linh với $\dim G > 0$ và $n = n(G)$. Vì $\mathcal{C}^{n-1}G \subset Z(G)$, ta có thể đặt câu hỏi liệu một khẳng định mạnh hơn một chút có đúng hay không, cụ thể là liệu có phải ta luôn có $\dim \mathcal{C}^{n-1}G > 0$. Tuy nhiên, một ví dụ đơn giản cho thấy điều này không đúng trong trường hợp tổng quát. Chẳng hạn, ta có thể lấy $G = G^\circ \times C$, trong đó G° là một nhóm giao hoán và C là nhóm hữu hạn, lũy linh với độ dài n . Vì vậy $\mathcal{C}^1G = \mathcal{C}^1C, \dots, \mathcal{C}^{n-1}G = \mathcal{C}^{n-1}C$ là hữu hạn, vì vậy nó có chiều bằng 0.

Với một nhóm đại số tuyến tính G , ta ký hiệu $\mathcal{Z}^iG$ là dãy tâm tăng tức là

$$\mathcal{Z}^0G = \{1\}, \mathcal{Z}^{i+1}G/\mathcal{Z}^iG = Z(G/\mathcal{Z}^iG).$$

Khi đó, ta biết rằng G là lũy linh nếu và chỉ nếu dãy tâm tăng này dừng lại tại G , tức là $\mathcal{Z}^iG = G$ với một số i nào đó. Ta có kết quả sau.

Mệnh đề 3.5. Cho G là một nhóm đại số lũy linh có số chiều dương xác định trên một trường đóng đại số k .

(a) Nếu $\dim G > \dim \mathcal{Z}^iG$ thì $\dim \mathcal{Z}^{i+1}G > \dim \mathcal{Z}^iG$.

(b) Nếu tập G_u tất cả các phần tử lũy linh của G là liên thông (chẳng hạn nếu $\text{char. } k = 0$) và $\dim \mathcal{C}^iG > 0$, thì $\dim \mathcal{C}^iG > \dim \mathcal{C}^{i+1}G$.

Chứng minh. (a) Theo định nghĩa ta có $\mathcal{Z}^{i+1}G/\mathcal{Z}^iG = Z(G/\mathcal{Z}^iG)$, nên nếu $\dim G > \dim \mathcal{Z}^iG$, thì ta có $\dim (G/\mathcal{Z}^iG) > 0$, vì vậy $\dim Z(G/\mathcal{Z}^iG) > 0$ theo Mệnh đề 3.3, hay là $\dim \mathcal{Z}^{i+1}G > \dim \mathcal{Z}^iG$.

(b) Nếu $\text{char. } k = 0$, thì khi đó ta biết rằng nhóm $G_u = R_u(G)$ và là liên thông. Trong trường hợp tổng quát, giả sử rằng G_u là liên thông. Nhắc lại rằng k là một trường đóng đại số, nên khi đó, theo [13, Thm. 4] ta có thể biểu diễn $G = G_s \times G_u$, trong đó G_s là một k -nhóm con tâm kiểu nhân tính của G và G_u là tập hợp (đồng thời là một nhóm con) gồm tất cả các phần tử lũy đơn của G . Khi đó ta có:

$$\mathcal{C}^1G = [G, G] = [G_u, G_u] = \mathcal{C}^1G_u,$$

$$\mathcal{C}^2 G = [G, \mathcal{C}^1 G] = [G, \mathcal{C}^1 G_u] = [G_u, \mathcal{C}^1 G_u] = \mathcal{C}^2 G_u.$$

Do đó, bằng quy nạp ta có:

$$\mathcal{C}^r G = \mathcal{C}^r G_u, \text{ với mọi } r \geq 1.$$

Vì vậy, mệnh đề cần chứng minh được suy ra từ trường hợp nhóm liên thông (Định lý 1.1). ■

Chú ý 3.6. Khẳng định 3.5 (1) có thể coi như là kết quả đối ngẫu với khẳng định 2.1 (1). Ở đây với điều kiện $\dim G > \dim \mathcal{Z}^i G$ (có thể coi là đối ngẫu với điều kiện $\dim \mathcal{D}^i G > 0$), ta thấy số chiều của dây tâm tăng là thực sự tăng (đối ngẫu với việc số chiều của dây dẫn xuất (giảm) là thực sự giảm).

4. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi đã mở rộng một số đánh giá quen thuộc về số chiều trong dây dẫn xuất và dây tâm, vốn đã biết đối với nhóm đại số lũy linh hay giải được liên thông, sang trường hợp không liên thông. Bên cạnh đó chúng tôi cũng đưa ra một số áp dụng vào việc xác định số chiều của các nhóm con trong các dây giảm, dây tăng và một số ví dụ. Trong các nghiên cứu tiếp theo, chúng tôi hy vọng sẽ đưa ra những kết quả thú vị cho lớp nhóm đại số không liên thông giải được hay tổng quát hơn.

Lời cảm ơn

Chúng tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành tới ông/bà phản biện về những góp ý quý báu để hoàn thiện bài báo này. Tác giả Nguyễn Quốc Thắng đã được tài trợ một phần bởi đề tài NVCC.01.01/25-25.

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

- [1] A. Borel, *Linear Algebraic Groups, Second enlarged ed., Graduate Texts in Math.* vol. 126, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [2] M. Demazure et P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Tome I, Paris, Masson, 1970.
- [3] J. E. Humphreys, *Linear Algebraic Groups, Second ed., Graduate Texts in Math.*, vol. 51, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [4] J. S. Milne, *Algebraic Groups. The theory of group schemes of finite type over a field, Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, vol. 170, Cambridge University Press, 2017.
- [5] S. Gelaki, "Twisting of Affine Algebraic Groups. I," *International Mathematics Research Notices*, no. 16, pp. 7552–7574, 2015.
- [6] S. Gelaki, "Twisting of Affine Algebraic Groups. II," *International Mathematics Research Notices*, no. 11, pp. 8508–8539, 2022.
- [7] Y. Peterzil and S. Starchenko, "O-minimal flows on nilmanifolds," *Duke Mathematical Journal*, vol. 170, no. 18, pp. 3935–3976, 2021.
- [8] J. P. Labesse, "Cohomologie, stabilisation et changement de base," *Astérisque*, no. 257, pp. 1-116, 1999.
- [9] P. N. Achar, W. Hardesty, S. Riche, "Representation Theory of Disconnected Reductive Groups," *Documenta Mathematica*, vol. 25, pp. 2149–2177, 2020.
- [10] J. J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*, 5th ed., Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics 148, Springer, 1999.
- [11] D. T. Nguyen and Q. T. Nguyen, "An analog of Serre's conjectures, Galois cohomology and defining equation of unipotent groups," *Proc. Jap. Acad.*, vol. 83, no. 7, pp. 93-98, 2007.
- [12] D. T. Nguyen and Q. T. Nguyen, "Galois cohomology of unipotent groups and field extensions," *Commun. in Algebra*, vol. 39, pp. 1-16, 2011.
- [13] V. P. Platonov, "On the theory of algebraic groups," *Doklady Acad. Sci.*, vol. 146, pp. 1025-1026, 1962.