

MODELING THE SHAFT MOTION IN THE BEARING OF AN INTERNAL GEAR PUMP USING FRACTIONAL DERIVATIVES

Nguyen Manh Hung*, Bui Viet Huong

University of Transport and Communications, Hanoi

ARTICLE INFO		ABSTRACT
Received:	02/6/2025	In the process of designing and calculating the internal gear pumps, the lubricant film is modeled by a spring-damper system. Previous studies have been based on the assumption that the force generated by the lubricant film is a linear function of displacement and velocity. This paper proposes a new model using fractional-order derivatives, in which the lubricant film force depends nonlinearly on the velocity. The paper also establishes a method for calculating the stiffness and damping coefficients in the model, as well as determining the trajectory of the shaft motion. Numerical simulations are performed with the fractional derivative order α ranging from 0.7 to 1.0. The results show that the stiffness coefficients converge rapidly and are less dependent on the value of α , while the damping coefficients decrease quickly to zero as α decreases. When the order α approaches 1, the computational results converge to the linear case. The study demonstrates the potential of applying fractional calculus to solve practical engineering problems.
Revised:	24/9/2025	
Published:	24/9/2025	
KEYWORDS		
Fluid dynamics		
Reynolds equation		
Lubricating oil film		
Fractional calculus		
Caputo derivative		

MÔ HÌNH HÓA CHUYỂN ĐỘNG CỦA TRỤC TRONG Ổ TRỤC CỦA BƠM BÁNH RĂNG ĂN KHỚP TRONG VỚI ĐẠO HÀM PHÂN THỨ

Nguyễn Mạnh Hùng*, Bùi Việt Hương

Trường Đại học Giao thông vận tải, Hà Nội

THÔNG TIN BÀI BÁO		TÓM TẮT
Ngày nhận bài:	02/6/2025	Trong quá trình thiết kế và tính toán bơm bánh răng ăn khớp trong, lớp màng dầu được mô hình hóa bởi một hệ lò xo giảm xóc. Các nghiên cứu trước đây dựa trên giả thiết rằng lực tác dụng của màng dầu bôi trơn là hàm tuyến tính đối với độ dịch chuyển và vận tốc chuyển động. Bài báo này đề xuất một mô hình mới với sự giúp đỡ của đạo hàm phân thứ, trong đó lực màng dầu phụ thuộc phi tuyến vào vận tốc chuyển động. Bài báo cũng xây dựng cách tính toán các hệ số đàn hồi và giảm chấn trong mô hình, cách xác định quỹ đạo chuyển động của trục. Các mô phỏng số được thực hiện với bậc đạo hàm phân thứ α từ 0,7 đến 1,0. Kết quả cho thấy các hệ số đàn hồi hội tụ nhanh, ít phụ thuộc vào bậc α , và các hệ số giảm chấn giảm nhanh về 0 khi α nhỏ. Khi bậc α tiến dần đến 1, kết quả tính toán hội tụ về trường hợp tuyến tính. Nghiên cứu chứng tỏ khả năng áp dụng giải tích phân thứ trong việc giải quyết các bài toán thực tế.
Ngày hoàn thiện:	24/9/2025	
Ngày đăng:	24/9/2025	
TỪ KHÓA		
Động lực học chất lưu		
Phương trình Reynolds		
Màng dầu bôi trơn		
Giải tích phân thứ		
Đạo hàm Caputo		

DOI: <https://doi.org/10.34238/tnu-jst.12953>

* Corresponding author. Email: hung.manh.nguyen@utc.edu.vn

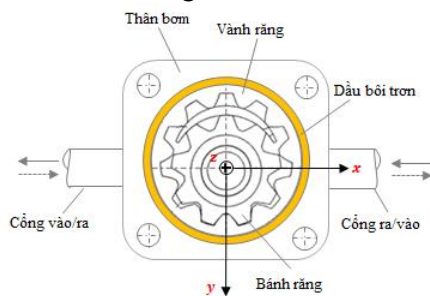
1. Giới thiệu

Hoạt động của máy móc thường có quan hệ mật thiết đến kỹ thuật bôi trơn. Về nguyên lý, màng dầu bôi trơn có vai trò ngăn cách, làm trơn các bề mặt tiếp xúc, và truyền tải các lực tác động thông qua áp suất sinh ra trong lớp màng dầu. Do đó, tính chất hoạt động của máy móc có thể phân tích được dựa vào các quy luật thủy động lực học. Nhiều nghiên cứu về tính chất thủy động lực học của chuyển động ổ trục trong động cơ nhận được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học trong nước và trên thế giới [1] – [10]. Một trong các phương pháp mô hình hóa và tính toán tác động của lớp màng dầu được đề xuất bởi J. W. Lund [2], ở đó lớp màng dầu được xem như một hệ thống lò xo giảm xóc (Hình 1 mô tả cấu tạo của một bơm bánh răng ăn khớp trong, và Hình 2 biểu diễn tác dụng của lớp màng dầu như một hệ lò xo – giảm xóc). Do đó, lực tác động của màng dầu được biểu diễn bởi một hàm tuyến tính của chuyển vị và vận tốc trục quay:

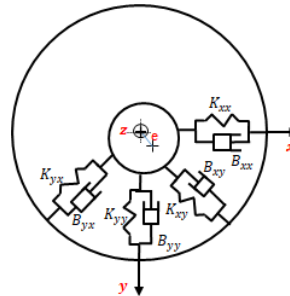
$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (F_x)_0 \\ (F_y)_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{xx} & b_{xy} \\ b_{yx} & b_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{y} \end{bmatrix} \quad (1)$$

trong đó k_{ij} là các hệ số đàn hồi, b_{ij} là các hệ số giảm chấn, Δx , Δy là độ dịch chuyển và $\Delta \dot{x}$, $\Delta \dot{y}$ là vận tốc của trục quay theo các trục x và y tương ứng.

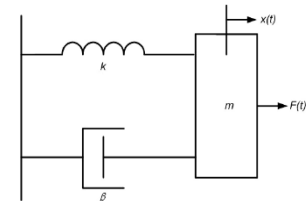
Kết quả tính toán các thông số động lực học như áp suất màng dầu, hệ số đàn hồi và hệ số giảm chấn được thực hiện trong [2], [4], làm cơ sở để phân tích các tính chất động học của máy móc và hoạt động bôi trơn.



Hình 1. Mặt cắt bơm bánh răng ăn khớp trong



Hình 2. Mô hình lò xo và giảm xóc



Hình 3. Hệ thống lò xo giảm xóc

Gần đây, giải tích phân thứ (sử dụng đạo hàm với bậc không nguyên) được phát triển mạnh mẽ và đã có nhiều ứng dụng thực tế được tìm thấy như phương trình truyền nhiệt [11], phương trình khuếch tán [12], phương trình Navier-Stokes [13], xử lý ảnh [14]. Trong các bài báo [12] – [19], đạo hàm phân thứ được sử dụng để mô hình hóa dao động tắt dần của hệ thống lò xo giảm xóc, tạo cơ sở để giải các bài toán phi tuyến trong thực tế. Chẳng hạn, mô hình lò xo giảm xóc như mô tả trong Hình 3 được sử dụng để minh họa khái niệm này, trong đó lực tác động $F(t)$ có thể được biểu diễn dưới dạng:

$$F(t) = kx(t) + b \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} \quad (2)$$

với $\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha}$ là đạo hàm phân thứ có bậc α thực.

Trong vật lý, lực cản chất lưu (chất lỏng hoặc khí) phụ thuộc vào nhiều yếu tố và không có biểu diễn thống nhất trong mọi trường hợp. Đối với vật thể chuyển động trong chất lưu, người ta sử dụng lực cản với công thức:

$$F = \frac{1}{2} \rho C_d A v^\alpha \quad (3)$$

trong đó, ρ là khối lượng riêng chất lưu, C_d là hệ số cản, A là diện tích cắt ngang của vật thể vuông góc với dòng chảy, v là vận tốc của vật thể chuyển động trong chất lưu. Nếu vận tốc v lớn, số mũ α được chọn bằng 2; nếu v nhỏ, số mũ α được chọn bằng 1. Kết quả này có được dựa trên phân tích dữ liệu thực nghiệm.

Trong nghiên cứu này, dựa trên đạo hàm phân thứ, chúng tôi mô hình hóa lực cản của màng dầu đối với trục bánh răng bởi hàm phụ thuộc vào vận tốc v với số mũ α thực. Trước tiên, bậc α được xem xét trong trường hợp $0 < \alpha < 1$. Phương pháp mô hình hóa này cũng phù hợp với các nghiên cứu gần đây như trong các bài báo [16] – [17] cả trên khía cạnh lý thuyết lẫn thực nghiệm. Các mô hình bôi trơn truyền thống thường xem xét dầu bôi trơn như là chất lỏng Newtonian. Thực tế có nhiều loại dầu bôi trơn, được bổ sung thêm một số chất phụ gia để kiểm soát độ nhớt, có thể biểu hiện tính chất nhớt đàn hồi (viscoelastic) [20], [21]. Do đó, việc sử dụng đạo hàm phân thứ để mô hình hóa lớp màng dầu là phù hợp.

Sự kết hợp của giải tích phân thứ và phương pháp mô hình hóa màng dầu bởi hệ thống lò xo giảm xóc có thể giúp mở ra hướng nghiên cứu mới về các đặc tính thủy lực của lớp màng dầu trong lý thuyết bôi trơn. Bài báo này đề xuất việc mô hình hóa lực tác động của lớp màng dầu bằng đạo hàm phân thứ và thực nghiệm tính toán với một số giá trị của bậc đạo hàm phân thứ. Mục 2 trình bày về một mô hình toán với đạo hàm phân thứ Caputo, phương trình Reynolds, lực tác dụng của màng dầu và phương trình chuyển động của trục. Trong mục 3, các kết quả tính toán bằng số được thực hiện với một số giá trị của bậc đạo hàm phân thứ. Mục 4 trình bày nhận xét và kết luận về phương pháp mô hình hóa bằng đạo hàm phân thứ.

2. Mô hình toán

2.1. Đạo hàm phân thứ Caputo

Đạo hàm phân thứ mở rộng khái niệm đạo hàm theo nghĩa thông thường cho bậc α không phải là số tự nhiên.

Định nghĩa 1 [22]: Cho $\alpha \in \mathbb{R}_+$ và $n = [\alpha]$. Toán tử J_a^α xác định trên $L_1[a, b]$ có dạng sau:

$$J_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (4)$$

với $a \leq x \leq b$, được gọi là toán tử tích phân phân thứ Riemann-Liouville bậc α .

Định nghĩa 2 [22]: Cho $\alpha \in \mathbb{R}_+$ và $n = [\alpha]$. Toán tử D_a^α , xác định bởi

$$D_a^\alpha f(x) = J_a^{n-\alpha} D^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt \quad (5)$$

được gọi là toán tử đạo hàm (phân thứ) Caputo bậc α .

Ví dụ 1: Xét hàm đa thức $f(x) = (x-a)^\beta$ với $\beta \geq 0$. Cho $\alpha > 0$ và $n = [\alpha]$, ta có:

$$D_a^\alpha [(x-a)^\beta] = \begin{cases} 0, & \text{nếu } \beta \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}, \\ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha}, & \text{nếu } \beta \in \mathbb{N} \text{ và } \beta \geq n, \\ \text{hoặc } \beta \notin \mathbb{N} \text{ và } \beta > n-1. \end{cases} \quad (6)$$

Nhận xét 1: Trong [23], người ta chứng minh được rằng một hàm trơn $f(x)$ có thể khai triển Taylor theo đạo hàm phân thứ Caputo với bậc $\alpha \in (0, 1)$ như sau:

$$f(x) = f(a) + \frac{(D_a^\alpha f)(a)}{\Gamma(1+\alpha)} (x-a)^\alpha + R_\alpha(x-a) \quad (7)$$

ở đó $R_\alpha(x-a)$ là phần dư, rất nhỏ so với các số hạng còn lại.

2.2. Phương trình Reynolds

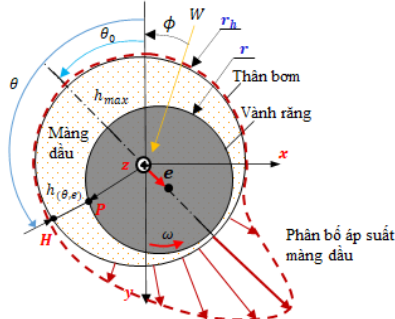
Xét hệ trục bánh răng và thân bơm được mô tả trong Hình 4. Giả thiết rằng khoảng trống giữa trục bánh răng và thân bơm được lấp đầy dầu bôi trơn. Hệ trục tọa độ Oxy có gốc tọa độ là tâm của thân bơm. Giả thiết rằng dòng chất lưu có độ nhớt đồng nhất và không chịu nén. Khi đó, phân bố áp suất p trong lớp màng dầu được xác định bởi phương trình Reynolds cho dòng chảy tầng dưới đây (xem [2]):

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\omega}{2} \frac{\partial h}{\partial \theta} + \dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta \quad (8)$$

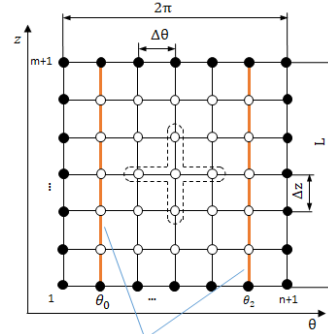
trong đó r là bán kính vành răng, μ là độ nhớt của chất lưu, ω là vận tốc quay, và h là bề dày của lớp màng dầu. Theo [2], bề dày lớp màng dầu được xấp xỉ bởi công thức:

$$h = c + e \cos(\theta - \theta_0) = c + x \sin \theta + y \cos \theta \quad (9)$$

ở đó, c là khe hở xuyên tâm giữa vành bánh răng và thân bơm, và e là độ lệch tâm.



Hình 4. Phân bố áp suất màng dầu



Hình 5. Lưới sai phân

Để tính toán áp suất của lớp màng dầu p , ta sử dụng phương pháp sai phân (xem [10]). Lưu ý rằng áp suất hiệu dụng chỉ phân bố trên một phần bề mặt của vành răng, như mô tả trên Hình 4. Do đó, điều kiện biên Reynolds thường được chọn thỏa mãn: $p(\theta, 0) = p(\theta, L) = 0$ và $p(\theta_0, z) = p(\theta_2, z) = 0$. Các giá trị θ_0 và θ_2 (Hình 5) không biết trước và được xác định trong quá trình tính toán. Cụ thể, theo [24], áp suất màng dầu $p_{i,j}$ tại nút lưới (θ_i, z_j) được xác định bởi công thức:

$$p_{i,j} = \frac{\lambda_{i,j}^a p_{i+1,j} + \lambda_{i,j}^b p_{i-1,j} + \lambda_{i,j}^c p_{i,j+1} + \lambda_{i,j}^d p_{i,j-1} - \lambda_{i,j}^f}{\lambda_{i,j}^e},$$

trong đó các hệ số $\lambda_{i,j}^*$ tính được từ việc sai phân hóa phương trình (8). Để tăng tốc quá trình tính toán, phương pháp hệ số tăng tốc (over-relaxation) được áp dụng:

$$p_{i,j}^{(k)} = p_{i,j}^{(k-1)} + \beta \left[\frac{\lambda_{i,j}^a p_{i+1,j}^{(k-1)} + \lambda_{i,j}^b p_{i-1,j}^{(k-1)} + \lambda_{i,j}^c p_{i,j+1}^{(k-1)} + \lambda_{i,j}^d p_{i,j-1}^{(k-1)} - \lambda_{i,j}^f}{\lambda_{i,j}^e} - p_{i,j}^{(k-1)} \right]$$

với hệ số tăng tốc $1,5 < \beta < 1,9$. Trong quá trình lặp, nếu $p_{i,j} < 0$ thì ta đặt $p_{i,j} = 0$. Quá trình tính toán được lặp đi lặp lại cho đến khi sai số tính toán nhỏ hơn ngưỡng δ_c cho trước:

$$\frac{\sum_{i,j} |p_{i,j}^{(k)} - p_{i,j}^{(k-1)}|}{\sum_{i,j} |p_{i,j}^{(k)}|} \leq \delta_c.$$

Trong nghiên cứu này, chúng ta chọn $\beta = 1,8$ và $\delta_c = 1e - 4$. Khi áp suất p hội tụ, các điểm biên (tương ứng với các góc θ_0 và θ_2) sẽ được xác định là các nút lưới có sự chuyển trạng thái của áp suất p từ 0 sang dương và ngược lại.

2.3. Lực tác dụng của màng dầu

Lực tác dụng của màng dầu dọc theo các trục x và y được gây nên bởi áp suất p như sau:

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = -r \int_{\theta_0}^{\theta_2} \int_0^L p \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} d\theta dz \quad (10)$$

Cho $0 < \alpha < 1$. Khi trục có dao động nhỏ xung quanh vị trí cân bằng, áp dụng khai triển Taylor phân thứ cho lực tác dụng của màng dầu, ta có biểu diễn:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (F_x)_0 \\ (F_y)_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{xx} & b_{xy} \\ b_{yx} & b_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{x}^\alpha \\ \Delta \dot{y}^\alpha \end{bmatrix} \quad (11)$$

trong đó k_{ij} và b_{ij} là các hệ số đàn hồi và hệ số giảm chấn. Các hệ số này được xác định bởi:

$$\begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial x} & \frac{\partial F_x}{\partial y} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} & \frac{\partial F_y}{\partial y} \end{pmatrix} = -r \int_{\theta_0}^{\theta_2} \int_0^L \begin{pmatrix} p_x \sin \theta & p_y \sin \theta \\ p_x \cos \theta & p_y \cos \theta \end{pmatrix} d\theta dz \quad (12)$$

$$\begin{pmatrix} b_{xx} & b_{xy} \\ b_{yx} & b_{yy} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \begin{pmatrix} D_{0,x}^\alpha F_x & D_{0,y}^\alpha F_x \\ D_{0,x}^\alpha F_y & D_{0,y}^\alpha F_y \end{pmatrix} = \frac{-r}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{\theta_0}^{\theta_2} \int_0^L \begin{pmatrix} p_{\dot{x},\alpha} \sin \theta & p_{\dot{y},\alpha} \sin \theta \\ p_{\dot{x},\alpha} \cos \theta & p_{\dot{y},\alpha} \cos \theta \end{pmatrix} d\theta dz \quad (13)$$

ở đó, $p_x = (\partial_x p)_0$, $p_y = (\partial_y p)_0$, $p_{\dot{x},\alpha} = (D_{0,\dot{x}}^\alpha p)_0$ và $p_{\dot{y},\alpha} = (D_{0,\dot{y}}^\alpha p)_0$ là các áp suất gây nên bởi độ dịch chuyển và biến thiên vận tốc quanh vị trí cân bằng.

Lấy đạo hàm thông thường và đạo hàm phân thứ phương trình (8) theo $x, y, \dot{x}, \dot{y}$, ta thu được:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p_x}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p_x}{\partial z} \right) = \frac{\omega}{2} \left(\cos \theta - \frac{3 \sin \theta}{h} \frac{\partial h}{\partial \theta} \right) - \frac{h^3}{4\mu r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\sin \theta}{h} \right) \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (14)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p_y}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p_y}{\partial z} \right) = -\frac{\omega}{2} \left(\sin \theta + \frac{3 \cos \theta}{h} \frac{\partial h}{\partial \theta} \right) - \frac{h^3}{4\mu r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\cos \theta}{h} \right) \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (15)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p_{\dot{x},\alpha}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p_{\dot{x},\alpha}}{\partial z} \right) = \frac{\sin \theta}{\Gamma(2-\alpha)} \dot{x}^{1-\alpha} \quad (16)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p_{\dot{y},\alpha}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p_{\dot{y},\alpha}}{\partial z} \right) = \frac{\cos \theta}{\Gamma(2-\alpha)} \dot{y}^{1-\alpha} \quad (17)$$

Chú ý rằng ở gần vị trí cân bằng, các vận tốc $\dot{x}$ và $\dot{y}$ là rất nhỏ nên có thể bỏ qua trong các phương trình (14) và (15). Giải các phương trình (8), (14) – (17), ta thu được các áp suất $p, p_x, p_y, p_{\dot{x},\alpha}, p_{\dot{y},\alpha}$ và từ đó tính được các hệ số đàn hồi và giảm chấn.

2.4. Phương trình chuyển động

Phương trình chuyển động của trục bánh răng có dạng sau đây:

$$m \begin{bmatrix} \Delta \ddot{x} \\ \Delta \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W \sin \phi \\ W \cos \phi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (F_x)_0 \\ (F_y)_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{xx} & b_{xy} \\ b_{yx} & b_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{x}^\alpha \\ \Delta \dot{y}^\alpha \end{bmatrix} \quad (18)$$

trong đó, m là khối lượng của trục bánh răng, W là ngoại lực tác động vào trục, và ϕ là góc tạo bởi ngoại lực so với phương thẳng đứng.

Rõ ràng, khi $\alpha \rightarrow 1$, ta quay trở lại mô hình chuyển động của ổ trục như đã đề xuất trong [2].

Để giải phương trình (18), khoảng thời gian $(0, T)$ được chia bởi các điểm lưới thời gian $t_k = k\Delta t$, $k = 0, 1, \dots, n$ với bước lưới $\Delta t = T/n$. Sau đó, áp dụng phương pháp Runge-Kutta bậc 4 (RK4) để giải phương trình vi phân này.

3. Kết quả tính toán số

Tính toán các hệ số động học của lớp màng dầu được thực hiện với các tham số được cho trong Bảng 1.

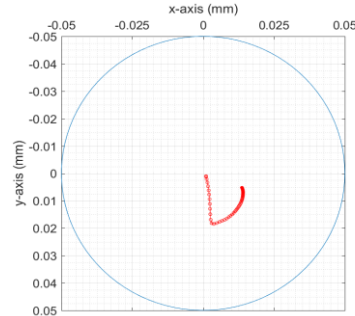
Đạo hàm phân thứ Caputo có bậc α được chọn với một số giá trị khác nhau: 0,7; 0,8; 0,9; 0,99; và 1,0. Bắt đầu mô phỏng, tâm của trục bánh răng có tọa độ (0,1e-5; 0,1e-5). Sau 200 bước lặp, tâm trục có tọa độ (1,37e-5; 5,23e-6). Hình 6 biểu diễn quỹ đạo chuyển động của trục với bậc $\alpha = 0,9$. Mô phỏng cho thấy trục bánh răng luôn quay tròn quanh vị trí cân bằng. Bảng 2 thể hiện các hệ số đàn hồi và giảm chấn sau 200 bước lặp. Kết quả tính toán cho thấy hệ số đàn hồi ít phụ thuộc vào bậc α , trong khi các hệ số giảm chấn có giá trị khá nhỏ.

Các hệ số đàn hồi $k_{xx}, k_{xy}, k_{yx}, k_{yy}$ được thể hiện trong Hình 7 đến Hình 10. Khi bậc đạo hàm α thay đổi, giá trị của các hệ số đàn hồi khác nhau ở những vòng lặp đầu tiên, tuy nhiên sau đó hội tụ khi số vòng lặp đủ lớn. Điều đó chứng tỏ rằng các hệ số đàn hồi rất ít hoặc không phụ

thuộc vào bậc của đạo hàm phân thứ α khi trục bánh răng dao động quanh vị trí cân bằng. Nói cách khác, lực đàn hồi vượt trội hơn đáng kể so với lực giảm chấn gây ra bởi vận tốc chuyển động quanh vị trí cân bằng.

Bảng 1. Giá trị các tham số dùng trong mô phỏng

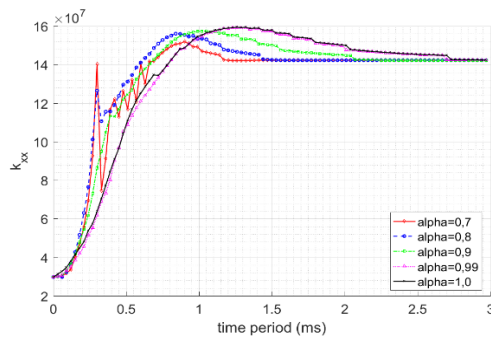
Tham số	Ký hiệu	Giá trị	Đơn vị
Đường kính bánh răng	D	0,11	m
Bề dày bánh răng	L	0,034	m
Độ nhớt	μ (HLP46)	0,041	Pa.s
Tốc độ quay	n	3000	rpm
Khoảng hở xuyên tâm	c	0,05	mm
Ngoại lực	W	3000	N
Khối lượng bánh răng	m	5	kg
Góc lực tác dụng	θ	0	rad
Bước thời gian	Δt	3,0e-5	s



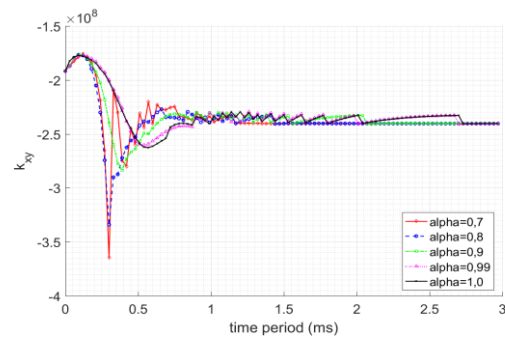
Hình 6. Chuyển động của trục bánh răng với bậc đạo hàm phân thứ $\alpha = 0,9$

Bảng 2. Giá trị các hệ số đàn hồi và giảm chấn ($\times 10^8$) sau 200 vòng lặp

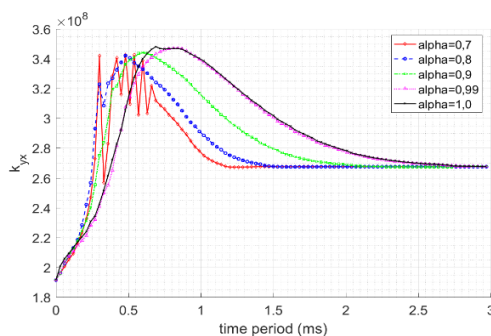
α	k_{xx}	k_{xy}	k_{yx}	k_{yy}	b_{xx}	b_{xy}	b_{yx}	b_{yy}
0,7	1,4224	-2,4036	2,6751	0,7827	0	0	0	0
0,8	1,4224	-2,4036	2,6751	0,7827	0	0	0	0
0,9	1,4224	-2,4036	2,6751	0,7827	0,0010	0,0003	0,0004	0,0009
0,99	1,4224	-2,4036	2,6751	0,7827	0,0139	0,0046	0,0050	0,0131
1,0	1,4224	-2,4036	2,6751	0,7827	0,0169	0,0056	0,0061	0,0160



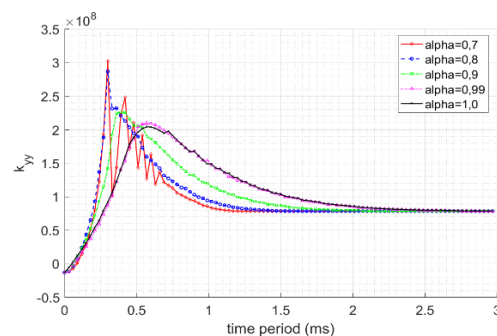
Hình 7. Hệ số đàn hồi k_{xx} với các bậc α khác nhau sau 100 bước lặp



Hình 8. Hệ số đàn hồi k_{xy} với các bậc α khác nhau sau 100 bước lặp



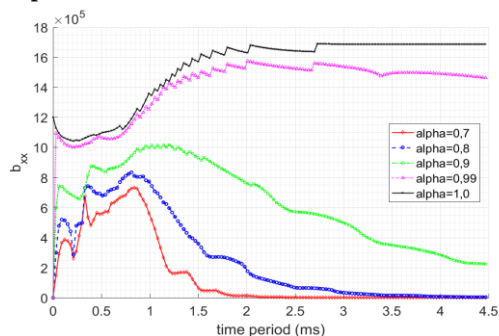
Hình 9. Hệ số đàn hồi k_{yx} với các bậc α khác nhau sau 100 bước lặp



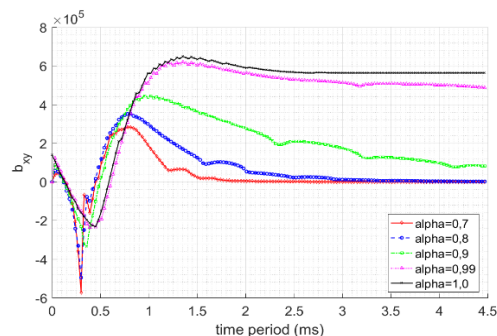
Hình 10. Hệ số đàn hồi k_{yy} với các bậc α khác nhau sau 100 bước lặp

Các hệ số giảm chấn $b_{xx}, b_{xy}, b_{yx}, b_{yy}$ được thể hiện trong Hình 11 đến Hình 14. Khi bậc α của đạo hàm phân thứ có giá trị nhỏ (0,7; 0,8; và 0,9), các hệ số giảm chấn giảm dần về 0 theo số vòng lặp tính toán. Giá trị của α càng nhỏ thì tốc độ giảm về 0 càng nhanh. Điều này cũng phù

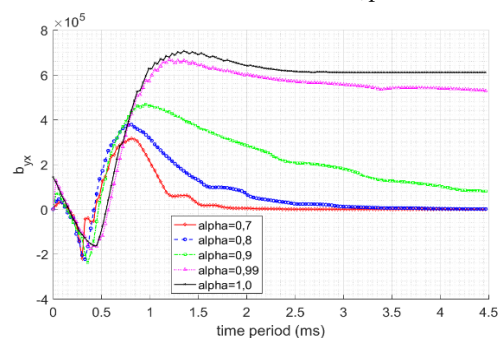
hợp với nhận định ở trên là lực gây nên do giảm chấn có độ lớn nhỏ hơn nhiều so với lực đàn hồi. Với giá trị α lớn (0,99) các hệ số giảm chấn hội tụ sau một số vòng lặp. Khi α tăng dần đến 1 thì giá trị giới hạn càng gần với các hệ số giảm chấn tính được trong trường hợp lực tác dụng màng dầu phụ thuộc bậc nhất đối với vận tốc $\dot{x}$ và $\dot{y}$.



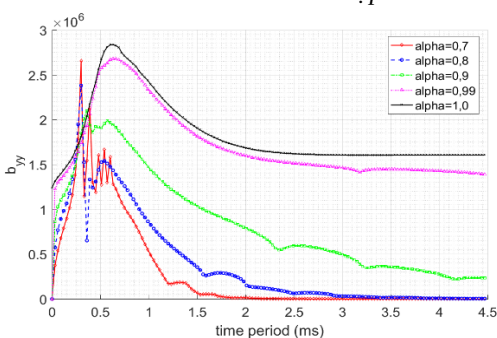
Hình 11. Hệ số giảm chấn b_{xx} với các bậc α khác nhau sau 150 bước lặp



Hình 12. Hệ số giảm chấn b_{xy} với các bậc α khác nhau sau 150 bước lặp



Hình 13. Hệ số giảm chấn b_{yx} với các bậc α khác nhau sau 150 bước lặp



Hình 14. Hệ số giảm chấn b_{yy} với các bậc α khác nhau sau 150 bước lặp

4. Kết luận

Mô hình hóa lớp màng dầu bôi trơn trong các động cơ cơ khí bởi hệ thống lò xo giảm xóc đã chứng minh được sự hiệu quả trong việc tính toán các đặc trưng động học, cũng như mô phỏng quỹ đạo chuyển động của trục động cơ. Với sự phát triển nhanh của giải tích phân thứ, trong đó đạo hàm thông thường được thay thế bằng đạo hàm với bậc không nguyên, các mô hình toán học mới đã và đang được nghiên cứu áp dụng cho những bài toán cổ điển.

Trong nghiên cứu này, chúng tôi đã đề xuất việc mô hình hóa lớp màng dầu bởi hệ lò xo giảm xóc dựa vào đạo hàm phân thứ, đồng thời khảo sát giá trị của bậc đạo hàm phân thứ α trong lân cận 1 để xem xét tính chất tiệm cận khi α tiến đến 1. Do đó, bậc α được chọn để mô phỏng nằm từ 0,7 đến 1. Mô phỏng cho thấy các hệ số đàn hồi ít phụ thuộc vào bậc α , và các hệ số giảm chấn giảm nhanh về 0 với α nhỏ. Ngoài ra, khi bậc α tiến dần đến 1, kết quả tính toán có xu hướng hội tụ về trường hợp tuyến tính. Nghiên cứu mới dừng lại ở việc xây dựng mô hình toán, thực hiện mô phỏng với một số giá trị của bậc đạo hàm phân thứ. Kết quả thu được có thể làm phong phú phương pháp tiếp cận bài toán, cũng như cung cấp nhiều khả năng lựa chọn mô hình để mô phỏng trong giai đoạn thiết kế ban đầu của bơm bánh răng ăn khớp trong. Nghiên cứu về tính ổn định của mô hình tính toán và kiểm chứng với dữ liệu thực nghiệm sẽ là những hướng đi tiếp theo của phương pháp tiếp cận dựa trên giải tích phân thứ.

Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Giao thông vận tải trong đề tài mã số T2025-CB-011.

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

- [1] G. Hong, K. Kim, Y. Park, and G. Jang, "Numerical Determination of the Frictional Coefficients of a Fluid Film Journal Bearing Considering the Elastohydrodynamic Lubrication and the Asperity Contact Force," *Machines*, vol. 10, 2022, Art. no. 494.
- [2] J. W. Lund and K. K. Thomsen, "A calculation method and data for the dynamic coefficients of oil-lubricated journal bearings," in *Topics in Fluid Film Bearing and Rotor Bearing System*, ASME, New York, 1978, pp. 1-28.
- [3] K. E. Pang and L. Ó Náraigh, "A mathematical model and mesh-free numerical method for contact-line motion in lubrication theory," *Environmental Fluid Mechanics*, vol. 22, pp. 301-336, 2022.
- [4] T. H. Pham, L. Müller, and J. Weber, "Dynamically loaded the ring gear in the internal gear motor/pump: Mobility of solution," *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 32, no. 7, pp. 3023-3035, 2018.
- [5] Z. Rasep *et al.*, "A study of cavitation effect in a journal bearing using CFD: A case study of engine oil, palm oil and water," *Jurnal Tribologi*, vol. 28, pp. 48-62, 2021.
- [6] M. Zhang, X. Ma, N. Guo, Y. Xue, and J. Li, "Calculation and Lubrication Characteristics of Cylindrical Roller Bearing Oil Film with Consideration of Thermal Effects," *Coatings*, vol.13, no. 56, pp. 1-15, 2023.
- [7] T. H. Pham, "Hybrid method to analysis the dynamic behavior of the ring gear for the internal gear motors and pumps," *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 33, no. 2, pp. 602-612, 2019.
- [8] T. H. Pham, "Numerical Study of the Pressure Distribution in the Internal Gear Motor and Pump," *International Journal of Fluid Machinery and Systems*, vol. 13, no. 2, pp. 371-379, 2020.
- [9] T. H. Pham, "Numerical Study of the Pressure Distribution in Internal Gear Motor and Pump Considering with Misalignment of Ring Gear," *International Journal of Fluid Machinery and Systems*, vol. 17, no. 3, pp.143-150, 2024.
- [10] T. H. Pham and H. M. Nguyen, "Numerical Calculation of Dynamic Stiffness and Damping Coefficients of Oil Lubrication Film in Internal Gear Motors and Pumps," *12th International Fluid Power Conference*, Dresden, Germany, March 9-11, 2020, pp. 369-377.
- [11] E. M. Abdelghany *et al.*, "A Tau Approach for Solving Time-Fractional Heat Equation Based on the Shifted Sixth-Kind Chebyshev Polynomials," *Symmetry*, vol.15, no. 594, pp. 1-17, 2023.
- [12] J. Wang, S. Yuan and X. Liu, "Finite Difference Scheme and Finite Volume Scheme for Fractional Laplacian Operator and Some Applications," *Fractal Fract*, vol. 7, no. 868, pp.1-25, 2023.
- [13] P. P. Mehta, "Fractional and tempered fractional models for Reynolds-averaged Navier-Stokes equations," *Journal of Turbulence*, vol. 24, pp. 507-553, 2023.
- [14] S. Gaur, A. M. Khan, D. L. Suthar, and A. Bora, "Image Edge Detection by Global Thresholding Using Riemann-Liouville Fractional Integral Operator," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2024, no.1, 2024, doi: 10.1155/2024/9266585.
- [15] R. AlSaleh, A. Nasir, and I. Abu-Alshaikh, "Investigating Fractional Damping Effect on Euler-Bernoulli Beam Subjected to a Moving Load," *Shock and Vibration*, vol. 2023, pp.1-19, 2023.
- [16] B. Chen, C. Li, B. Wilson, and Y. Huang, "Fractional modeling and analysis of coupled MR damping system," *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, vol. 3, no. 3, pp. 288-294, 2016.
- [17] J. E. Martínez, L.M. Mendoza, M.I. Cruz-Orduña, *et al.*, "Fractional differential equation modeling of viscoelastic fluid in mass-spring-magnetorheological damper mechanical system," *Eur. Phys. J. Plus*, vol. 135, no. 847, pp.1-18, 2020.
- [18] J. F. Gomez-Aguilar *et al.*, "Fractional mechanical oscillators," *Revista Mexicana de Fisica*, vol. 58, pp. 348-352, 2012.
- [19] W. Waseem, M. Sulaiman, and A. J. Aljohani, "Investigation of fractional models of damping material by a neuroevolutionary approach," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol.140, pp.1-12, 2020.
- [20] L. I. Farfan-Cabrera *et al.*, "Viscoelastic Water-Based Lubricants with Nopal Cactus Mucilage as Green Metalworking Fluids," *Lubricants*, vol. 12, no. 2, pp. 1-14, 2024.
- [21] S. S. Gamaniel, D. Dini, and L. Biancofiore, "The effect of fluid viscoelasticity in lubricated contacts in the presence of cavitation," *Tribology International*, vol. 160, pp. 1-18, 2021.
- [22] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.
- [23] Z. M. Odibat and N. T. Shawagfeh, "Generalized Taylor's formula," *Applied Mathematics and Computation*, vol.186, pp. 286-293, 2007.
- [24] Z. L. Qiu, "A Theoretical and Experimental on Dynamic Characteristics of Journal Bearings," Ph.D. Dissertation, University of Wollongong, 1995.