ĐIỀU KIỆN CẦN TỐI ƯU CHO NGHIỆM HỮU HIỆU YẾU ĐỊA PHƯƠNG CỦA BÀI TOÁN CÂN BẰNG VECTƠ THEO ĐẠO HÀM STUDNIARSKI

Đinh Diệu Hằng[1,*], **Trương Hà Hải**[2]

[1,2]Trường Đại học Công Nghệ Thông Tin và Truyền Thông - Đại học Thái Nguyên

TÓM TẮT

Các lĩnh vực nghiên cứu cho bài toán cân bằng vectơ được rất nhiều nhà khoa học quan tâm nghiên cứu, chẳng hạn nghiên cứu về sự tồn tại nghiệm, cấu trúc tập nghiệm, độ nhạy nghiệm, điều kiện tối ưu và thuật toán tìm nghiệm. Trong các hướng nghiên cứu này thì điều kiện tối ưu được quan tâm nhiều hơn do tính ứng dụng của nó cho các hướng nghiên cứu còn lại. Đạo hàm Studniarski (Studniaski's derivative) là công cụ quan trọng trong thiết lập các điều kiện tối ưu cấp cao cho các dạng bài toán tối ưu vectơ đơn trị. Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu điều kiện cần tối ưu cho nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc tập và ràng buộc bất đẳng thức tổng quát thông qua ngôn ngữ của đạo hàm Studniaski trong không gian Banach.

Từ khóa: *Điều kiện cần tối ưu cho bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc, nghiệm hữu hiệu yếu, nghiệm hữu hiệu yếu địa phương, đạo hàm Studniaski, nón tiếp liên.*

1 MỞ ĐẦU

Bài toán cân bằng vô hướng được thiết lập đầu tiên vào năm 1994 bởi Blum và Oettli [2] nhằm tổng quát hóa các bài toán về điểm cân bằng Nash và bài toán bất đẳng thức biến phân. Trong các năm 1996 và 1997, Bianchi và các cộng sự [3, 4] đã mở rộng bài toán này sang trường hợp vectơ và các tác giả đã nghiên cứu kết quả về sự tồn tại nghiệm cho bài toán. Năm 2008, Gong [5] đã thiết lập các loại nghiệm hữu hiệu yếu, nghiệm hữu hiệu yếu địa phương, nghiệm hữu hiệu Henig, nghiệm hữu hiệu toàn cục và nghiệm siêu hữu hiệu cho bài toán cân bằng vectơ tổng quát và áp dụng công cụ giải tích lồi để thiết lập các điều kiện cần và đủ tối ưu cho các loại nghiệm này, và Luu-Hang [7] sử dụng công cụ dưới vi phân để nghiên cứu điều kiện điều kiện hữu hiệu cho bài toán cân bằng vectơ không trơn. Hiện nay bài toán cân bằng vectơ có vai trò quan trọng trong giải tích phi tuyến và đặc biệt là toán học ứng dụng (xem [5, 6, 7]). Các lĩnh vực nghiên cứu cho bài toán cân bằng vectơ là đa dạng, chẳng hạn như sự tồn tại nghiệm, cấu trúc tập nghiệm, độ nhạy nghiệm, điều kiện tối ưu và thuật toán tìm nghiệm. Trong các hướng nghiên cứu này thì điều kiện tối ưu được quan tâm nhiều hơn do tính ứng dụng của nó cho các hướng nghiên cứu còn lại.

Đạo hàm Studniarski (Studniaski's derivative) được gọi tên theo tác giả của bài báo [1], và là công cụ quan trọng trong thiết lập các điều kiện tối ưu cấp cao cho các dạng bài toán tối ưu vectơ đơn trị (xem [1, 6] cho chi tiết). Năm 2008, Luu [6] đã sử dụng khái niệm đạo hàm Studniaski cấp cao để thiết lập điều kiện tối ưu cho cực tiểu pareto chặt địa phương của bài toán tối ưu vectơ trong không gian vô hạn chiều. Đối với các loại nghiệm hữu hiệu được thiết lập trong Gong [5], ta nhận thấy rằng các điều kiện tối ưu theo đạo hàm Studniaski là chưa được sử dụng để thiết lập các điều kiện tối ưu cho các bài toán cân bằng vectơ tổng quát trong không gian vô hạn chiều.

Mục đích của chúng tôi trong bài báo này là sử dụng khái niệm đạo hàm Studniaski để nghiên cứu điều kiện cần tối ưu cho nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán cân bằng vectơ tổng quát. Kết quả thu được của chúng tôi là mới và chưa được nghiên cứu trước đây và nó có thể được áp dụng để xây dựng các thuật

[0]*Tel: 0934445889, e-mail: dinhhangch16tn@gmail.com

toán số cho bài toán cân bằng nói chung và bài toán tối ưu nói riêng trong thời gian tới bởi các nhà nghiên cứu thuật toán.

2 KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Cho X, Y và Z là các không gian Banach thực, trong đó Y và Z được sắp thứ tự bởi các nón lồi đóng và có phần trong khác rỗng C và K tương ứng. Cho A là một tập khác rỗng của X. Phần trong và bao đóng của A được ký hiệu tương ứng bởi int$A$ và cl$A$. Không gian đối ngẫu tôpô của Y và Z theo thứ tự được ký hiệu bởi Y^* và Z^* tương tứng, và các nón đối ngẫu của C và K được ký hiệu theo thứ tự bởi là C^+ và K^+, ở đây

$$C^+ = \{\xi \in Y^* : \langle \xi, c\rangle \geq 0 \ \ (\forall c \in C)\},$$

$$K^+ = \{\xi \in Z^* : \langle \xi, d\rangle \geq 0 \ \ (\forall d \in K)\}.$$

Để ý rằng các nón C^+ và K^+ là lồi và đóng yếu*. Với mỗi $\overline{x} \in X$ và $\delta > 0$, hình cầu mở tâm $\overline{x}$ bán kính δ ký hiệu $B(\overline{x}, \delta)$.

Tiếp theo chúng tôi giới thiệu khái niệm các nghiệm hữu hiệu yếu và nghiệm hữu hiệu yếu địa phương cho bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc tập và nón tổng quát đã được đề xuất trước đây trong Gong [5] như sau.

Bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc tập và nón được ký hiệu bởi (SCVEP) được định nghĩa như sau: Cho song hàm $F : A \times A \to Y$ thỏa mãn điều kiện cân bằng $F(x_0, x_0) = 0$ với mọi $x_0 \in A$, và hàm ràng buộc $g : A \to Z$. Tập chấp nhận được của bài toán (SCVEP) được ký hiệu bởi

$$S = \{x \in A : g(x) \in -K\}.$$

Để cho tiện, với mỗi $\overline{x} \in X$ ta ký hiệu

$$F_{\overline{x}}(S) = F(\overline{x}, S) = \bigcup_{x\in S} F(\overline{x}, x).$$

Định nghĩa 2.1 ([5]) Một vectơ $\overline{x} \in S$ được gọi là nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (SCVEP) nếu

$$F_{\overline{x}}(x) \notin -\text{int}\, C \ \ (\forall\, x \in S). \qquad (2.1)$$

Nếu vectơ $\overline{x}$ trong quan hệ (2.1) đúng với mọi $x \in S \cap B(\overline{x}, \delta)$, ở đây $\delta > 0$ được gọi là một nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán (SCVEP).

Hiển nhiên một nghiệm hữu hiệu yếu cũng là một nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán (SCVEP). Bên cạnh, điều kiện (2.1) có thể viết lại ở dạng tương đương sau:

$$F_{\overline{x}}(S) \cap (-\text{int}\, C) = \emptyset. \qquad (2.2)$$

Tiếp theo chúng tôi giới thiệu khái niệm đạo hàm Studniaski được đề xuất bởi chính Studniaski [1] như sau:

Định nghĩa 2.2 ([1, 6]) Cho ánh xạ $f : X \to Y$, các điểm $\overline{x}, v \in X$ và m là một số nguyên lớn hơn hoặc bằng 1. Đạo hàm Studniaski cấp m của f tại điểm $(\overline{x}, v)$ được ký hiệu bởi $d_S^m f(\overline{x}, v)$, trong đó

$$d_S^m f(\overline{x}; v) = \lim_{\substack{t\to 0^+ \\ u\to v}} \frac{f(\overline{x} + tu) - f(\overline{x})}{t^m}$$

nếu giới hạn tồn tại.

Trong trường hợp $m = 1$, ta viết $d_S f(\overline{x}; v)$ thay cho $d_S^1 f(\overline{x}; v)$.

Các nón tiếp liên sau là cần thiết trong việc thiết lập các điều kiện cần tối ưu cấp cao cho nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán (SCVEP).

Định nghĩa 2.3 ([6]) Nón tiếp liên của tập A tại điểm $\overline{x} \in cl\, A$ được định nghĩa bởi

$$T_A(\overline{x}) = \{v \in X : \exists\, t_n > 0, \exists\, x_n \in A, \\ x_n \to \overline{x} \text{ sao cho } t_n(x_n - \overline{x}) \to v\}.$$

Định nghĩa 2.4 ([6]) Nón phần trong của nón tiếp liên của tập A tại điểm $\overline{x} \in cl\, A$ được định nghĩa bởi

$$IT_A(\overline{x}) = \{v \in X : \exists\, t_n \to 0^+ \text{ sao cho} \\ \forall v_n \to v,\ \overline{x} + t_n v_n \in A,\ \forall\, n \text{ đủ lớn}\}.$$

Mệnh đề 2.5 ([8]) Nón tiếp liên của tập A tại điểm $\overline{x} \in cl\,A$ được xác định ở dạng tương đương sau

$$T_A(\overline{x}) = \{v \in X \,:\, \exists x_n \in A \setminus \{\overline{x}\},\, x_n \to \overline{x} \text{ sao cho } \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n - \overline{x}}{\|x_n - \overline{x}\|} = \frac{v}{\|v\|}\} \cup \{0\}.$$

Cuối cùng chúng tôi đề xuất một nón mới tạm gọi là $\widetilde{T}_A(\overline{x})$ thỏa mãn quan hệ bao hàm

$$IT_A(\overline{x}) \subset \widetilde{T}_A(\overline{x}) \subset T_A(\overline{x}),$$

được mô tả ở dạng sau

$$\widetilde{T}_A(\overline{x}) = \{v \in X \,:\, \exists t_n \to 0^+ \text{ sao cho } \overline{x} + t_n v \in A,\ \forall n \text{ đủ lớn}\}.$$

Để dễ theo dõi bài báo chúng tôi ký hiệu $t_n \to 0^+$ thay cho một dãy số dương hội tụ về không, và ký hiệu $z_n \to z$ nghĩa là

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z.$$

3 KẾT QUẢ MỚI CỦA BÀI BÁO

Đầu tiên chúng tôi cung cấp một điều kiện cần tối ưu cho nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán (SCVEP) theo ngôn ngữ của đạo hàm Studniaski trong không gian Banach.

Định lí 3.1 (Điều kiện cần dạng cơ bản) Cho $\overline{x} \in S$ thỏa mãn $F_{\overline{x}}(\overline{x}) = 0$. Giả sử rằng các đạo hàm Studniaski $d_S F_{\overline{x}}(\overline{x}; v)$ và $d_S g(\overline{x}; v)$ tồn tại theo mọi phương $v \in X$. Khi đó, nếu $\overline{x}$ là một nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán (SCVEP) thì

$$d_S F_{\overline{x}}(\overline{x}; v) \notin -C\ (\forall v \in T_A(\overline{x}) \cap \{u \in X : d_S g(\overline{x}; u) \in -\mathrm{int}\, K\}).$$

Chứng minh. Nếu $\overline{x}$ là một nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán (SCVEP) thì theo Định nghĩa 2.1, tồn tại số thực dương δ sao cho

$$F_{\overline{x}}(x) \notin -C \quad \forall x \in S \cap B(\overline{x}, \delta). \tag{3.1}$$

Bây giờ ta chứng minh

$$d_S F_{\overline{x}}(\overline{x}; v) \notin -\mathrm{int} C \quad \forall v \in T_A(\overline{x}) \cap \{u \in X : d_S g(\overline{x}; u) \in -\mathrm{int}\, K\}. \tag{3.2}$$

Thật vậy, giả sử ngược lại điều kiện trong (3.2) là sai, khi đó tồn tại $v \in T_A(\overline{x})$ sao cho $d_S g(\overline{x}; v) \in -\mathrm{int}\, K$. Hệ quả $v \neq 0$. Áp dụng Mệnh đề 2.5, ta tìm được dãy $x_n \in A \setminus \{\overline{x}\}$ với $x_n \to \overline{x}$ thỏa mãn

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n - \overline{x}}{\|x_n - \overline{x}\|} = \frac{v}{\|v\|}.$$

Đặt $v_n = \frac{x_n - \overline{x}}{\|x_n - \overline{x}\|}\|v\|$ và $t_n = \frac{\|x_n - \overline{x}\|}{\|v\|}$. Khi đó, ta dễ dàng kiểm tra được $v_n \to v$ và $t_n \to 0^+$. Ngoài ra, ta còn tính được

$$x_n = \overline{x} + t_n v_n \in A \ \forall n \geq 1. \tag{3.3}$$

Mặt khác, ta còn có

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{g(\overline{x} + t_n v_n) - g(\overline{x})}{t_n} = d_S g(\overline{x}; v) \in -\mathrm{int} K.$$

Do $\mathrm{int} K$ là tập mở nên tồn tại $N_1 > 0$ sao cho với mọi $n \geq N_1$ ta có

$$g(\overline{x} + t_n v_n) - g(\overline{x}) \in -\mathrm{int} K,$$

hay tương đương

$$g(\overline{x} + t_n v_n) \in g(\overline{x}) - \mathrm{int} K.$$

Do $g(\overline{x}) \in -K$ và $K + \mathrm{int} K = \mathrm{int} K$, ta nhận được

$$g(\overline{x} + t_n v_n) \in -\mathrm{int} K \ \ \forall n \geq N_1. \tag{3.4}$$

Kết hợp (3.3)-(3.4) và điều kiện bao hàm thức $\mathrm{int} K \subset K$, ta kết luận

$$\overline{x} + t_n v_n \in S \ \ \forall n \geq N_1. \tag{3.5}$$

Để ý rằng $\overline{x} + t_n v_n \to \overline{x} \in B(\overline{x}, \delta)$, lúc này tồn tại $N_2 > 0$ sao cho

$$\overline{x} + t_n v_n \in S \cap B(\overline{x}, \delta) \ \ \forall n \geq N_1,\ n \geq N_2.$$

Đặt $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$, ta nhận được

$$\overline{x} + t_n v_n \in S \cap B(\overline{x}, \delta) \ \forall n \geq N_3. \quad (3.6)$$

Ngoài ra, ta cũng có

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F_{\overline{x}}(\overline{x} + t_n v_n) - F_{\overline{x}}(\overline{x})}{t_n} = d_S F_{\overline{x}}(\overline{x}; v) \in -\mathrm{int}C.$$

Do $-\mathrm{int}C$ là tập mở nên ta tìm được $N_4 > 0$ sao cho với mọi $n \geq N_4$,

$$F_{\overline{x}}(\overline{x} + t_n v_n) - F_{\overline{x}}(\overline{x}) \in -\mathrm{int}C,$$

hay tương đương (vì $F_{\overline{x}}(\overline{x}) = 0$):

$$F_{\overline{x}}(\overline{x} + t_n v_n) \in -\mathrm{int}C.$$

Đặt $N = \max\{N_3, N_4\}$, từ (3.6) ta có

$$\overline{x} + t_n v_n \in S \cap B(\overline{x}, \delta) \ \forall n \geq N \quad (3.7)$$

và hơn nữa,

$$F_{\overline{x}}(\overline{x} + t_n v_n) \in -\mathrm{int}C \ \forall n \geq N. \quad (3.8)$$

Kết hợp (3.7)-(3.8) ta có mâu thuẫn với điều kiện (3.1).

Điều phải chứng minh. □

Hệ quả 3.2 Cho $\overline{x} \in S$ thỏa mãn $F_{\overline{x}}(\overline{x}) = 0$. Giả sử rằng các đạo hàm Studniaski $d_S F_{\overline{x}}(\overline{x}; v)$ và $d_S g(\overline{x}; v)$ tồn tại theo mọi phương $v \in X$. Khi đó, nếu $\overline{x}$ là một nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (SCVEP) thì

$$d_S F_{\overline{x}}(\overline{x}; v) \notin -\mathrm{int}C$$
$$\forall v \in T_A(\overline{x}) \cap \{u \in X : d_S g(\overline{x}; u) \in -\mathrm{int}\, K\}.$$

Chứng minh. Vì $\overline{x}$ là một nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (SCVEP) nên nó cũng là một nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán (SCVEP). Áp dụng Định lí 3.1 ta nhận được kết quả cần chứng minh. □

Định lí 3.3 (Điều kiện cần dạng đối ngẫu) Cho $\overline{x} \in S$ thỏa mãn $F_{\overline{x}}(\overline{x}) = 0$. Giả sử rằng các đạo hàm Studniaski $d_S F_{\overline{x}}(\overline{x}; v)$ và $d_S g(\overline{x}; v)$ tồn tại theo mọi phương $v \in X$. Khi đó, nếu $\overline{x}$ là một nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán (SCVEP) thì $\forall v \in T_A(\overline{x}) \cap \{u \in X : d_S g(\overline{x}; u) \in -\mathrm{int}\, K\}$, $\exists \xi \in Y^* \setminus \{0\}$ sao cho

$$\xi \in C^+, \quad (3.9)$$
$$\langle \xi, d_S F_{\overline{x}}(\overline{x}; v) \rangle \geq 0. \quad (3.10)$$

Chứng minh. Sử dụng Định lí 3.1, với mọi $v \in T_A(\overline{x})$ thỏa mãn $d_S g(\overline{x}; v) \in -\mathrm{int}\, K$ ta có

$$d_S F_{\overline{x}}(\overline{x}; v) \notin -\mathrm{int}C.$$

Áp dụng một định lí tách mạnh các tập lồi rời nhau $\{d_S F_{\overline{x}}(\overline{x}; v)\}$ và $-\mathrm{int}C$ trong mọi Giáo trình giải tích lồi (có thể xem Rockafellar [9] cho chi tiết hơn), ta tìm được phiếm hàm tuyến tính liên tục và khác không trên Y sao cho

$$\langle \xi, d_S F_{\overline{x}}(\overline{x}; v) \rangle > \langle \xi, -c \rangle \quad \forall c \in \mathrm{int}C.$$

Hệ quả là

$$\langle \xi, d_S F_{\overline{x}}(\overline{x}; v) \rangle + \langle \xi, c \rangle \geq 0 \ \forall c \in \mathrm{cl\,int}C.$$

Bởi vì $\mathrm{cl\,int}C = \mathrm{cl}\, C = C$, do tập C đóng nên

$$\langle \xi, d_S F_{\overline{x}}(\overline{x}; v) \rangle + \langle \xi, c \rangle \geq 0 \ \forall c \in C. \quad (3.11)$$

Do $0 \in C$, ta thu được

$$\langle \xi, d_S F_{\overline{x}}(\overline{x}; v) \rangle \geq 0,$$

nghĩa là bất đẳng thức trong (3.10) được thỏa mãn. Bây giờ ta kiểm tra điều kiện (3.9). Do C là một nón, từ (3.11) ta lấy số dương $t > 0$ tùy ý và nhận được

$$\langle \xi, d_S F_{\overline{x}}(\overline{x}; v) \rangle + \langle \xi, tc \rangle \geq 0 \ \forall c \in C. \quad (3.12)$$

Chia cả 2 vế trong (3.12) bởi $t > 0$ ta được

$$\frac{1}{t} \langle \xi, d_S F_{\overline{x}}(\overline{x}; v) \rangle + \langle \xi, c \rangle \geq 0 \ \forall c \in C. \quad (3.13)$$

Cho $t \to +\infty$ trong (3.13) ta thu được

$$\langle \xi, c \rangle \geq 0 \ \forall c \in C,$$

nghĩa là $\xi \in C^+$ và điều này kết thúc chứng minh định lí. □

Hệ quả 3.4 Cho $\overline{x} \in S$ thỏa mãn $F_{\overline{x}}(\overline{x}) = 0$. Giả sử rằng các đạo hàm Studniaski $d_S F_{\overline{x}}(\overline{x}; v)$ và $d_S g(\overline{x}; v)$ tồn tại theo mọi phương $v \in X$. Khi đó, nếu $\overline{x}$ là một nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (SCVEP) thì $\forall v \in T_A(\overline{x})$ với $d_S g(\overline{x}; v) \in -\operatorname{int} K$, $\exists \xi \in Y^* \setminus \{0\}$ sao cho

$$\xi \in C^+,$$
$$\langle \xi, d_S F_{\overline{x}}(\overline{x}; v) \rangle \geq 0.$$

Chứng minh. Lập luận tương tự như các chứng minh trong Hệ quả 3.2 và Định lí 3.3 ta thu được kết quả. □

Chú ý 3.5 Các kết quả thu được trong Định lí 3.1, Định lí 3.3, Hệ quả 3.2 và Hệ quả 3.4 vẫn còn đúng nếu ta thay nón tiếp tuyến $T_A(\overline{x})$ bởi các nón $IT_A(\overline{x})$ và $\widetilde{T}_A(\overline{x})$.

4 KẾT LUẬN

Bài báo đã thiết lập được điều kiện cần tối ưu cho nghiệm hữu hiệu yếu địa phương và nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc tập và nón dựa trên đạo hàm Studniaski trong không gian Banach. Kết quả nhận được là mới và chưa được nghiên cứu trước đây cho nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán cân bằng vectơ theo ngôn ngữ đạo hàm Studniaski trong không gian Banach. Tuy nhiên, trong bài báo này chúng tôi đề xuất thêm một số vấn đề mở cần được nghiên cứu tiếp theo trong tương lai như sau:

(i) Tìm điều kiện đủ cho nghiệm hữu hiệu yếu và hữu hiệu yếu địa phương của bài toán (SCVEP) theo đạo hàm Studniaski trong không gian Banach.

(ii) Mở rộng nghiên cứu kết quả cho điều kiện cần và điều kiện đủ tối ưu cấp cao cho nghiệm hữu hiệu yếu và hữu hiệu yếu địa phương của bài toán (SCVEP) theo đạo hàm Studniaski cấp cao trong không gian Banach.

Tài liệu

[1] M. Studniaski (1986), Necessary and sufficient conditions for isolated local minima of nonsmooth functions, *SIAM J. cont/optim.*, 24, pp. 1044-1049.

[2] E. Blum, W. Oettli (1994), From optimization and variational inequalities to equilibrium problems, *Math. Stud.*, 63, pp. 127-149.

[3] M. Bianchi, S. Schaible (1996), Generalized monotone bifunctions and equilibrium problems, *J. Optim. Theory Appl.*, 90, pp. 31-43.

[4] M. Bianchi, N. Hadjisavvas, S. Schaible (1997), Vector equilibrium problems with generalized monotone bifunctions, *J. Optim. Theory Appl.*, 92, pp. 527-542.

[5] X. H. Gong (2008), Optimality conditions for vector equilibrium problems, *J. Math. Anal. Appl.*, 342, pp. 1455-1466.

[6] D. V. Luu (2008), Higher-order necessary and sufficient conditions for strict local Pareto minima in terms of Studniarski's derivatives, *Optimization*, 57, pp. 593-605.

[7] D. V. Luu, D. D. Hang (2015), On efficiency conditions for nonsmooth vector equilibrium problems with equlibrium constraints, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 36, pp. 1622-1642.

[8] G. Giorgi, A. Guerraggio (1992), On the notion of tangent cone in mathematical programming, *Optim.*, 25, pp. 11-23.

[9] R.T. Rockafellar (1970), Convex Analysis, *Princeton University Press, Princeton.*

5 Lời cảm ơn

Bài báo này được tài trợ bởi Đại học Thái Nguyên với mã số Đề tài DH2016-TN07-02.

SUMMARY

NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS FOR LOCAL WEAK EFFICIENT SOLUTION OF VECTOR EQUILIBRIUM PROBLEMS VIA STUDNIARSKI'S DERIVATIVES

Dinh Dieu Hang[1,*], Truong Ha Hai[2]

[1,2]University of Information and Communication Technology, Thai Nguyen University

Abstract: In this article, we study the necessary optimality conditions for local weak efficient solution of vector equilibrium problems with set and generalized inequality constraints in terms of studniarski's derivatives in Banach spaces.

Keywords: Necessary optimality conditions for vector equilibrium problem, local weak efficient solution, studniarski's derivative.

[0]*Tel: 0934445889, e-mail: dinhhangch16tn@gmail.com

Ngày nhận bài: 13/9/2018; Ngày hoàn thiện: 07/11/2018; Ngày duyệt đăng: 30/11/2018