

## ĐỊNH LÝ ĐIỂM BẤT ĐỘNG TRONG KHÔNG GIAN METRIC NÓN HÌNH HỘP CHỮ NHẬT

**Lê Anh Tuấn**

*Trường Đại học Công nghiệp Hà Nội*

### TÓM TẮT

Năm 2000, Branciari đã thay thế bất đẳng thức tam giác bằng một bất đẳng thức tổng quát hơn mà ngày nay được gọi là bất đẳng thức hình hộp chữ nhật và đưa ra khái niệm về không gian metric hình hộp chữ nhật, không gian này là suy rộng của không gian metric. Năm 2009, Azam, Arshad and Beg (Azam, A., Arshad, M., Beg, I., 2009) giới thiệu không gian metric nón hình hộp chữ nhật và chứng minh một số định lý điểm bất động của ánh xạ co với nón chuẩn tắc. Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh định lý điểm bất động của ánh xạ co trong không gian metric nón hình hộp chữ nhật với nón có phần trong không chuẩn tắc.

**Từ khóa:** Tối ưu; Điểm bất động; Nón; Nón có phần trong; Không gian metric; Không gian metric nón; Không gian metric nón hình hộp chữ nhật...

*Ngày nhận bài: 22/5/2019; Ngày hoàn thiện: 03/7/2019; Ngày đăng: 26/7/2019*

## A FIXED POINT THEOREM IN RECTANGULAR CONE METRIC SPACES

**Lê Anh Tuấn**

*Ha Noi University of Industry*

### ABSTRACT

In 2000, Branciari replaced the triangle inequality by a more general one which today is known as the rectangular inequality and introduced the notion of generalized metric space or rectangular metric space. In 2009, Azam, Arshad and Beg (Azam, A., Arshad, M., Beg, I., 2009) introduced the concept of rectangular cone metric space and proved fixed point results for normal cone. In this paper, we establish a fixed point theorem for contraction mapping in rectangular cone metric spaces via solid cone and non-normal cone.

**Key words:** Optimization; Fixed point; Cone; Solid cone; Metric spaces; Cone metric spaces; Rectangular cone metric spaces.

*Received: 22/5/2019; Revised: 03/7/2019; Published: 26/7/2019*

Email: tuansl83@yahoo.com

## 1. GIỚI THIỆU

Giả sử  $E$  là không gian Banach thực với điểm gốc là  $\theta$  và  $C$  là tập con của  $E$ .

**Định nghĩa 0.1.** ([2]) Ta nói rằng  $C$  là nón trong  $E$  nếu

- (i)  $C$  là đóng, không rỗng và  $C \neq \{\theta\}$ ,
- (ii)  $ax + by \in C$  với mọi  $x, y \in C$  và  $a, b$  là các số thực không âm,
- (iii)  $C \cap (-C) = \{\theta\}$ .

Với nón  $C$  trong  $E$ , ta định nghĩa thứ tự bộ phận  $\preceq$  sinh bởi  $C$  như sau

$$x \preceq y \text{ nếu và chỉ nếu } y - x \in C.$$

Ta viết  $x \ll y$  nếu  $y - x \in \text{int } C$ , ở đây  $\text{int } C$  là phần trong của nón  $C$ .

**Định nghĩa 0.2.** ([1]) Giả sử  $X$  là tập không rỗng. Ánh xạ  $d : X \times X \rightarrow E$  được gọi là metric nón hình hộp chữ nhật trên  $X$  nếu

- (d1)  $\theta \preceq d(x, y)$  với mọi  $x, y \in X$  và  $d(x, y) = \theta$  nếu và chỉ nếu  $x = y$ ;
- (d2)  $d(x, y) = d(y, x)$  với mọi  $x, y \in X$ ;
- (d3)  $d(x, y) \preceq d(x, z) + d(z, t) + d(t, y)$  với mọi  $x, y \in X$  và với mọi  $z, t \in X \setminus \{x, y\}, z \neq t$ . Cặp  $(X, d)$  được gọi là không gian metric nón hình hộp chữ nhật.

**Định nghĩa 0.3.** ([1]) Giả sử  $(X, d)$  là không gian metric nón hình hộp chữ nhật và  $\{x_n\}$  là dãy trong  $X$ . Ta nói rằng

- (i)  $x$  là giới hạn của dãy  $\{x_n\}$  nếu với mỗi  $e \in E, \theta \ll e$  tồn tại  $n_0$  sao cho  $d(x_n, x) \ll e$  với mọi  $n \geq n_0$ . Ta kí hiệu  $x_n \rightarrow x$  hoặc  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .
- (ii)  $\{x_n\}$  là dãy Cauchy nếu với mỗi  $e \in E, \theta \ll e$  tồn tại  $n_0$  sao cho  $d(x_n, x_m) \ll e$  với mọi  $n, m \geq n_0$ .
- (iii)  $(X, d)$  là đầy đủ nếu mọi dãy Cauchy trong  $X$  đều hội tụ trong nó.

Ta dễ dàng chứng minh được bổ đề dưới đây.

**Bổ đề 0.4.** Giả sử  $C$  là nón có phần trong trên không gian Banach thực  $E$ . Với  $v, w, z \in E$  và  $\{a_n\} \subset E$ , ta có

- (i) nếu  $z \preceq w$  và  $w \ll v$  thì  $z \ll v$ .
- (ii) nếu  $\theta \preceq z \ll c$  với mọi  $c \in \text{int } C$  thì  $z = \theta$ .
- (iii) nếu  $c \in \text{int } C$  và  $a_n \rightarrow \theta$ , tồn tại  $n(c)$  sao cho  $a_n \ll c$  với mọi  $n \geq n(c)$ .

## 2. ĐỊNH LÝ ĐIỂM BẤT ĐỘNG

Trong phần này, chúng tôi chứng minh định lý điểm bất động của ánh xạ co trong không gian metric nón hình hộp chữ nhật với nón có phần trong không chuẩn tắc.

**Định lý 0.5.** Giả sử  $(X, d)$  là không gian metric nón hình hộp chữ nhật đầy đủ với thứ tự sinh bởi nón có phần trong  $C$  và  $T : X \rightarrow X$  là ánh xạ thỏa mãn điều kiện co

$$d(Tx, Ty) \preceq \lambda d(x, y) \text{ với mọi } x, y \in X,$$

ở đây  $\lambda \in [0, 1)$ . Khi đó  $T$  có duy nhất một điểm bất động.

*Chứng minh.* Ta chứng minh định lý theo hai bước.

**Sự tồn tại điểm bất động:** Lấy  $x_0 \in X$  cố định. Ta xây dựng dãy  $\{x_n\}$  bởi  $x_{n+1} = Tx_n$  với mọi  $n \geq 0$ . Nếu tồn tại  $k \in \mathbb{N}$  sao cho  $x_{k-1} = x_k$  thì  $x_k = Tx_{k-1} = x_{k-1}$ . Vậy  $x_{k-1}$  là điểm bất động của  $T$ . Bây giờ ta có thể giả sử  $x_{n-1} \neq x_n$  với mọi  $n \in \mathbb{N}$ . Trước tiên, ta chứng minh  $x_n \neq x_m$  với mọi  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $n \neq m$ . Thật vậy, giả sử tồn tại  $n, p \in \mathbb{N}$  sao cho  $x_n = x_{n+p}$  và  $p \geq 2$ . Khi đó  $x_{n+1} = x_{n+p+1}$ . Bởi  $T$  thỏa mãn điều kiện co nên

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(x_{n+p}, x_{n+p+1}) \\ &\preceq \lambda d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\preceq \lambda^p d(x_n, x_{n+1}). \end{aligned}$$

Vì  $\lambda^p \in [0, 1)$  nên  $d(x_n, x_{n+1}) = \theta$ . Điều này mâu thuẫn với  $x_n \neq x_{n+1}$ . Do vậy  $x_n \neq x_m$  với mọi  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $n \neq m$ . Mặt khác, do  $T$  thỏa mãn điều kiện co nên

$$\begin{aligned} d(Tx_{n-1}, Tx_n) &\preceq \lambda d(x_{n-1}, x_n), \\ d(Tx_{n-1}, Tx_{n+1}) &\preceq \lambda d(x_{n-1}, x_{n+1}), \end{aligned}$$

với mọi  $n \in \mathbb{N}$ . Điều này kéo theo

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\preceq \lambda^n d(x_0, x_1) \text{ và} \\ d(x_n, x_{n+2}) &\preceq \lambda^n d(x_0, x_2) \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Giả sử  $n, m \in \mathbb{N}$  với  $n > m$ . Nếu  $n - m$  là chẵn, bởi bất đẳng thức hình hộp chữ nhật, ta suy ra

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\preceq d(x_m, x_{m+1}) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\preceq (\lambda^m + \dots + \lambda^{n-1})d(x_0, x_1) \\ &\preceq \frac{\lambda^m}{1 - \lambda} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Từ  $\frac{\lambda^m}{1 - \lambda} \rightarrow 0$  khi  $m \rightarrow +\infty$ , nên  $\frac{\lambda^m}{1 - \lambda} d(x_0, x_1) \rightarrow \theta$  khi  $m \rightarrow +\infty$ . Từ đó suy ra  $d(x_m, x_n) \rightarrow \theta$  khi  $m, n \rightarrow +\infty$ . Vậy,  $\{x_n\}$  là dãy Cauchy trong  $X$ . Nếu  $n - m$  là lẻ, bởi bất đẳng thức hình hộp chữ nhật, ta suy ra

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\preceq d(x_m, x_{m+1}) + \dots + d(x_{n-2}, x_n) \\ &\preceq (\lambda^m + \dots + \lambda^{n-3})d(x_0, x_1) \\ &\quad + \lambda^{n-2}d(x_0, x_2) \\ &\preceq \frac{\lambda^m}{1 - \lambda} d(x_0, x_1) + \lambda^{n-2}d(x_0, x_2). \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ  $\{x_n\}$  là dãy Cauchy trong  $X$ . Vì  $(X, d)$  đầy đủ nên tồn tại  $\xi \in X$  sao cho  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ .

Từ  $x_n \neq x_m$  với  $n \neq m$ , tồn tại  $n(\xi) \in \mathbb{N}$  sao cho

$$\xi \neq x_n \neq x_{n+1} \neq T\xi \text{ với mọi } n \geq n(\xi).$$

Do đó

$$\begin{aligned} d(\xi, T\xi) &\preceq d(\xi, x_n) + d(x_n, x_{n+1}) \\ &\quad + d(x_{n+1}, T\xi) \\ &= d(\xi, x_n) + d(x_n, x_{n+1}) \\ &\quad + d(Tx_n, T\xi) \\ &\preceq d(\xi, x_n) + d(x_n, x_{n+1}) \\ &\quad + \lambda d(x_n, \xi). \end{aligned}$$

Bởi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (d(\xi, x_n) + d(x_n, x_{n+1}) + \lambda d(x_n, \xi)) = \theta$$

nên  $d(\xi, T\xi) = \theta$ . Vậy  $\xi = T\xi$ . Điều này chứng tỏ  $\xi$  là điểm bất động của ánh xạ  $T$ .

**Tính duy nhất điểm bất động:** Giả sử  $\zeta \neq \xi$  là điểm bất động khác của  $T$ . Khi đó ta có

$$d(\xi, \zeta) = d(T\xi, T\zeta) \preceq \lambda d(\xi, \zeta).$$

Điều này kéo theo

$$d(\xi, \zeta) \preceq \frac{1}{1-\lambda} \cdot \theta = \theta.$$

Từ đó suy ra  $d(\xi, \zeta) = \theta$ . Vậy  $\xi = \zeta$ . Do đó  $\xi$  là điểm bất động duy nhất của  $T$ . Vậy định lý được chứng minh.  $\square$

**Example 0.1.** Giả sử  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$  là nón có phần trong trên  $E$ . Đặt  $X = \{0, 1, 2, 3\}$  và định nghĩa  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^2$  bởi

$$\begin{aligned} d(0, 0) &= d(1, 1) = d(2, 2) = d(3, 3) = (0, 0), \\ d(0, 1) &= d(1, 0) = (3, 6), \\ d(0, 3) &= d(3, 0) = d(1, 3) = d(3, 1) = (2, 4), \\ d(1, 2) &= d(2, 1) = d(0, 2) = d(2, 0) = (1, 2). \end{aligned}$$

Khi đó  $(X, d)$  là không gian metric nón hình hộp chữ nhật đầy đủ nhưng  $(X, d)$  không là không gian metric nón vì

$$d(0, 2) + d(2, 1) = (2, 4) \prec (3, 6) = d(0, 1)$$

Xét ánh xạ  $T : X \rightarrow X$  bởi

$$T(x) = \begin{cases} 2, & \text{nếu } x \neq 3, \\ 0, & \text{nếu } x = 3. \end{cases}$$

Chú ý rằng

$$d(T0, T1) = d(T0, T2) = d(T1, T2) = (0, 0)$$

và trong các trường hợp còn lại, ta có

$$d(Tx, Ty) = (1, 2), d(x, y) = (2, 4).$$

Vậy với  $\lambda = \frac{1}{2}$ , tất cả các giả thiết của Định lý 0.5 được thỏa mãn và  $\xi = 2$  là điểm bất động duy nhất của  $T$ .

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. A. Azam, M. Arshad and I. Beg, *Banach contraction principle on cone rectangular metric spaces*, Appl. Anal. Discrete Math, vol. 3, pp. 236-241, 2009.
- [2]. L. G. Huang and X. Zhang, *Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings*, J. Math. Anal. Appl, vol. 332, pp. 1468-1476, 2007.

