

ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ MINIMAX CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU VỚI RÀNG BUỘC PHÂN BỐ NGUỒN LỰC

Trần Văn Thắng

Trường Đại học Điện lực.

Số điện thoại: 0983420580. Email: thangtv@epu.edu.vn

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi ứng dụng định lý minimax của von Neumann và một mở rộng của định lý minimax dưới dạng bất đối xứng của giáo sư Hoàng Tụy vào nghiên cứu bài toán tối ưu với các ràng buộc phân bố nguồn lực. Chúng tôi chỉ ra được rằng tồn tại một phương án sản xuất hữu hiệu x^* trong tập các phương án thỏa mãn các ràng buộc phân bố nguồn lực sao cho lợi nhuận thu được luôn đảm bảo không nhỏ hơn ω khi giá bán biến động trên tập lồi compact Q , ω là một hằng số cho trước.

Từ khóa: Định lý Minimax; Nghiệm hữu hiệu; Phân bố nguồn lực; tối ưu véctơ; hàm lợi nhuận.

1 Mở đầu

Chúng ta biết rằng định lý minimax có nhiều ứng dụng trong lý thuyết tối ưu, lý thuyết trò chơi, cơ học, vật lý học, hình học vi phân, kỹ thuật xây dựng, lý thuyết điều khiển, sinh vật học và kinh tế học. Do vậy, đã có nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu, mở rộng đưa ra nhiều phát biểu cho định lý minimax ([1],[4]).

Trong bài báo này, chúng tôi sử dụng định lý minimax vào nghiên cứu bài toán tối ưu với các ràng buộc phân bố nguồn lực. Giả sử $q \in \mathbb{R}_+^n$ là giá bán của vectơ sản xuất x được xác định bởi bài toán phân bố nguồn lực ([3]), $F(q, x)$ được xem là lợi nhuận tại x ứng với giá bán q và Q là một tập lồi compact trong $\mathbb{R}_+^n$ sao cho với mỗi $q \in Q$ tồn tại một phương án $x \in X$ sao cho $F(q, x) \geq \omega$, khi đó chúng tôi chỉ ra rằng tồn tại một

phương án $x^* \in X$ sao cho $F(q, x^*) \geq \omega$, trong đó ω là một hằng số dương.

2 Định lý Minimax

Trong phần này, chúng tôi nhắc lại định lý minimax của von Neumann và một dạng mở rộng của định lý minimax dưới dạng bất đối xứng của Hoàng Tụy. Sau đó chúng tôi trình bày ý nghĩa về mặt kinh tế của hai định lý này.

Định lý 2.1. (von Neumann [1]). Cho Q và X là các tập lồi, compact và khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$. Nếu $F(q, x)$ là hàm liên tục trên $Q \times X$, tựa lồi theo q khi cố định x và tựa lõm theo x khi cố định q . Khi đó

$$\min_{q \in Q} \max_{x \in X} F(q, x) = \max_{x \in X} \min_{q \in Q} F(q, x)$$

Cho $q \in \mathbb{R}_+^n$ là giá bán của x và $F(q, x)$

được xem là lợi nhuận tại vector x ứng với giá bán q . Giả thiết rằng Q là một tập lồi compact trong $\mathbb{R}_+^n$ sao cho với mỗi $q \in Q$ tồn tại một phương án $x \in X$ sao cho $F(q, x) \geq \omega$, trong đó ω là một hằng số dương.

Chúng ta chứng minh được định lý sau

Định lý 2.2. Nếu $F(p, x)$ là hàm liên tục trên $Q \times X$, tựa lồi theo q khi cố định x và tựa lõm theo x khi cố định q . Khi đó, tồn tại vectơ $x^* \in X$ sao cho $F(q, x^*) \geq \omega$ với mọi $q \in Q$

Chứng minh. Vì mỗi $q \in Q$ tồn tại vectơ $x \in X$ sao cho $F(q, x) \geq \omega$, chúng ta có $\max_{x \in X} F(q, x) \geq \omega$ với mọi $q \in Q$, điều này tương đương với

$$\min_{q \in Q} \max_{x \in X} F(q, x) \geq \omega.$$

Theo Định lý 2.1, chúng ta có

$$\max_{x \in X} \min_{q \in Q} F(p, x) \geq \omega.$$

Do đó, tồn tại vectơ $x^* \in X$ sao cho $F(q, x^*) \geq \omega$ với mọi $q \in Q$. $\square$

Ý nghĩa: Theo Định lý 2.2, chúng ta có thể chọn được một phương án x^* mà khi giá bán biến động trên tập Q thì lợi nhuận thu được luôn đảm bảo không nhỏ hơn ω , (ω có thể là mức lợi nhuận tối thiểu để đảm bảo công ty hoạt động hoặc là một giá trị mà công ty đề ra). Với phương án x^* công ty có thể không tối ưu được lợi nhuận nhưng đổi lại sẽ đảm bảo sự hoạt động ổn định của công ty trong thời gian nhất định mà không cần điều chỉnh phương án sản xuất. Chú ý rằng việc thay đổi phương án sản xuất có thể làm tăng chi phí sản xuất.

Ví dụ $F(q, x) = q^T x - 1$ là hàm lợi nhuận tại x ứng với giá bán p . Dễ thấy, $F(p, x)$ thỏa mãn các giả thiết của Định lý 2.2.

Định lý sau là dạng mở rộng của định lý minimax được đưa ra bởi H. Tuy.

Định lý 2.3. ([4]) Cho Q và X trong $\mathbb{R}^n$ là các tập lồi compact trong $\mathbb{R}^n$, $F(q, x)$ là hàm liên tục trên $Q \times X$, tựa lồi theo q . Nếu $Z : Q \rightarrow 2^X$ là ánh xạ nửa liên tục trên từ Q vào X , sao cho với mỗi q trong Q , $Z(p)$ là một tập lồi, compact, khác rỗng thì

$$\max_{x \in X} \min_{q \in Q} F(q, x) \geq \min_{q \in Q} \min_{x \in Z(p)} F(q, x)$$

Dễ thấy rằng với các giả thiết của Định lý 2.3 và Q ta chỉ ra rằng tồn tại phương án x^* sao cho $F(q, x^*) \geq \omega$ với mọi $q \in Q$.

Sau đây, chúng tôi trình bày ứng dụng của Định lý 2.3 cho bài toán tối ưu trên tập nghiệm hữu hiệu.

Giả sử $f_i(x)$ là hàm lợi nhuận tại x , $i = 1, 2, \dots, m$. Ta xét bài toán sau

$$\max_{x \in X} f(x), \quad (1)$$

trong đó $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$, $f_i(x)$ liên tục, lõm chặt trên $\mathbb{R}_+^n$ với mọi $i = 1, 2, \dots, m$.

Ký hiệu X_E là tập nghiệm hữu hiệu Pareto của bài toán (1). Đặt

$$\Delta = \{\mu \in R_+^m : \sum_{i=1}^m \mu_i = 1\}.$$

Do (1) là bài toán tối ưu đa mục tiêu lõm nên $x \in X_E$ thì tồn tại $\mu \in \Delta$ sao cho x là điểm cực đại của $\mu^T f(x)$ trên X . Vì $f_i(x)$ là các hàm liên tục và lõm chặt trên $\mathbb{R}_+^n$ với mọi $i = 1, 2, \dots, m$ cho nên với mỗi $\mu \in \Delta$ tồn tại duy nhất $x \in \operatorname{argmax}_{x \in X} \mu^T f(x)$. Đặt $x(\mu) \in X_E$ sao cho $x(\mu) \in \operatorname{argmax}_{x \in X} \mu^T f(x)$ khi đó $x(\mu)$ là một hàm số trên Δ .

Mệnh đề 2.1. $x(\mu)$ là hàm liên tục trên Δ .

Chứng minh. Giả sử $\{\mu^n\} \rightarrow \bar{\mu}$, $\mu^n \in \Delta$. Khi đó ta có $\bar{\mu} \in \Delta$ and

$$\mu^{nT} f(x(\mu^n)) \geq \mu^{nT} f(x) \quad \forall x \in X.$$

Vì X là tập compact, không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết rằng $x(\mu^n) \rightarrow \bar{x}$. Do $x(\mu^n) \in \text{argmax}_{x \in X} \mu^{nT} f(x)$ ta có

$$\mu^{nT} f(x(\mu^n)) \geq \mu^{nT} f(x) \quad \forall x \in X.$$

Từ giả thiết f_i liên tục với mọi $i = 1, 2, \dots, m$, suy ra $\bar{\mu}^T f(\bar{x}) \geq \bar{\mu}^T f(x) \quad \forall x$. Do đó $\bar{x}$ điểm cực đại của $\bar{\mu}^T f(x)$ trên X . Vì $f_i(x)$ là các hàm lõm chặt trên $\mathbb{R}_+^n$ với mọi $i = 1, 2, \dots, m$ nên chúng ta có $\bar{x} = x(\bar{\mu})$. $\square$

Với $q \in Q$, chúng ta xét bài toán

$$\max\{F(q, x) : x \in X_E\} \quad (2)$$

Để dàng chỉ ra bài toán trên tương đương với bài toán sau

$$\max\{F(q, x(\mu)) : \mu \in \Delta\} \quad (3)$$

Định nghĩa $Z(q)$ là ánh xạ đa trị từ Q vào Δ được xác định bởi

$$Z(q) = \{\mu \in \Delta : \mu \in \text{argmax}_{\mu \in \Delta} F(q, x(\mu))\}.$$

Mệnh đề 2.2. Nếu $F(q, x)$ là hàm liên tục trên $Q \times X$ và tựa lõm chặt theo x khi cố định q thì Z là hàm nửa liên tục trên. Ngoài ra, $Z(q)$ là **một tập** lồi compact và khác rỗng trong $\mathbb{R}_+^m$ với mỗi $q \in Q$.

Chứng minh. Cho $\{q^n\} \rightarrow \bar{q}$, $q^n \in Q$. Giả sử rằng $\mu^n \in Z(q^n) \quad \forall n$ và $\{\mu^n\} \rightarrow \bar{\mu}$. Chúng ta cần chứng minh $\bar{\mu} \in Z(\bar{q})$. Vì $\mu^n \in Z(q^n) \quad \forall n$ ta có

$$F(q^n, x(\mu^n)) \geq F(q^n, x(\mu)) \quad \forall \mu \in \Delta \quad (4)$$

Từ tính liên tục của $F(q, x)$ theo x và $x(\mu)$ liên tục theo μ , ta suy ra $F(q, x(\mu))$ là hàm liên tục trên Δ , lấy giới hạn theo n hai vế của bất đẳng thức (4) ta có

$$F(\bar{q}, x(\bar{\mu})) \geq F(\bar{q}, x(\mu)) \quad \forall \mu \in \Delta.$$

Suy ra $\bar{\mu} \in Z(\bar{q})$. Do đó, Z là hàm nửa liên tục trên.

Từ tính compact của Δ và tính liên tục của $F(q, x(\mu))$ theo μ trên Δ , ta có $Z(q) \neq \emptyset$. Để thấy $Z(q)$ là tập đóng.

Giả sử $\{\mu^n\} \rightarrow \bar{\mu}$, $\mu^n \in Z(q)$. Khi đó, $F(q, x(\mu^n)) \geq F(q, x(\mu)) \quad \forall \mu \in \Delta$. Lấy giới hạn hai vế của bất đẳng thức này ta được

$$F(q, x(\bar{\mu})) \geq F(q, x(\mu)) \quad \forall \mu \in \Delta.$$

Điều này kéo theo $\bar{\mu} \in \text{argmax}_{\mu \in \Delta} F(q, x(\mu))$. Vì vậy, $Z(q)$ là tập đóng.

Cho $\mu^1, \mu^2 \in Z(q)$. Vì $F(q, x)$ liên tục trên $Q \times \Delta$ và tựa lõm chặt theo x nên với mỗi $q \in P$ bài toán (2) có nghiệm duy nhất $\bar{x} \in X_E$. Do đó, $F(q, \bar{x}) = F(q, x(\mu^1)) = F(q, x(\mu^2))$ (bởi vì (2) và (7) là hai bài toán tương đương). Điều này kéo theo $\bar{x} = x(\mu^1) = x(\mu^2)$. Đặt $\bar{\mu} = \lambda\mu^1 + (1 - \lambda)\mu^2$, $\lambda \in [0, 1]$. Khi đó

$$\begin{aligned} & \bar{\mu}^T f(x) \\ &= [\lambda\mu^1 + (1 - \lambda)\mu^2]^T f(x) \\ &= \lambda\mu^{1T} f(x) + (1 - \lambda)\mu^{2T} f(x) \\ &\leq \lambda\mu^{1T} f(x(\mu^1)) + (1 - \lambda)\mu^{2T} f(x(\mu^2)) \\ &= \lambda\mu^{1T} f(\bar{x}) + (1 - \lambda)\mu^{2T} f(\bar{x}) \\ &= [\lambda\mu^1 + (1 - \lambda)\mu^2]^T f(\bar{x}) \\ &= \bar{\mu}^T f(\bar{x}) \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Suy ra $x(\bar{\mu}) = \bar{x} = x(\mu^1)$ hay $\bar{\mu} \in Z(q)$. Do đó $Z(q)$ là tập lồi với mỗi $q \in Q$ $\square$

Định lý 2.4. Cho $F(q, x)$ là hàm liên tục trên $Q \times X$, tựa lồi theo q và tựa lõm chặt theo biến x . Khi đó, tồn tại vectơ $x^* \in X_E$ sao cho $F(q, x^*) \geq \omega$ với mọi $q \in Q$.

Chứng minh. Từ chứng minh của Mệnh đề 2.1 ta có $F(q, x(\mu))$ là hàm liên tục trên $Q \times \Delta$. Theo Mệnh đề 2.2 và Định lý 2.3 ta có

$$\max_{\mu \in \Delta} \min_{q \in Q} F(q, x(\mu)) \geq \min_{q \in Q} \min_{\mu \in Z(q)} F(q, x(\mu)).$$

Giả thiết rằng Q là một tập lồi compact trong $\mathbb{R}_+^n$ sao cho với mỗi $q \in Q$ tồn tại một phương án $x \in X$ sao cho $F(q, x) \geq \omega$, suy ra

$$\min_{q \in Q} \min_{\mu \in Z(q)} F(q, x(\mu)) \geq \omega.$$

Do đó,

$$\max_{\mu \in \Delta} \min_{q \in Q} F(q, x(\mu)) \geq \omega.$$

Điều này có nghĩa là tồn tại $\mu^* \in \Delta$ sao cho $F(q, x(\mu^*)) \geq \omega$ với mọi $q \in Q$. Do đó, tồn tại vectơ $x^* = x(\mu^*) \in X_E$ sao cho $F(q, x^*) \geq \omega$ với mọi $q \in Q$ $\square$

3 Tối ưu với các ràng buộc phân bổ nguồn lực

Bài toán với một ràng buộc phân bổ nguồn lực được phát biểu như sau (xem [3]).

Cho m vectơ $a^i \in \mathbb{R}^n, a^i > 0, i = 1, \dots, m$ và $\alpha \in \mathbb{R}^n, \alpha > 0$ sao cho

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1. \quad (5)$$

Xét bài toán tìm các vectơ $x \in \mathbb{R}_+^n$ và $p \in \mathbb{R}_+^n$ thỏa mãn hệ các đẳng thức và bất đẳng thức sau:

$$x = \sum_{i=1}^m \theta_i a^i, \theta_i \geq 0 \forall i, \sum_{i=1}^m \theta_i = 1, \quad (6)$$

$$p_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n, p^T a^i \leq 1 \forall i, \quad (7)$$

$$p_j x_j = \alpha_j \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Bài toán này có thể gặp trong việc lập kế hoạch hoạt động của một công ty có m nhà máy để sản xuất n hàng hoá khác nhau. Để sản xuất các hàng hoá này, một nguồn lực nhất định có tổng bằng 1 được phân bổ cho các nhà máy. Giả sử $a^i, a_j^i >$

$0 \quad \forall j = 1, \dots, n$ là vectơ đặc trưng cho năng lực của nhà máy thứ i , nghĩa là nhà máy thứ i chạy hết công suất có thể sản xuất được a_j^i đơn vị hàng hóa thứ $j, j = 1, \dots, n$. Số p_j biểu thị phần nguồn lực được phân bổ cho việc sản xuất một đơn vị hàng hóa thứ j và x_j là tổng lượng hàng hóa thứ j cần sản xuất bởi cả công ty. Khi đó, $p_j x_j$ là tổng nguồn lực được phân bổ cho việc sản xuất hàng hóa thứ j , tức là giá vốn sản xuất lượng hàng hóa thứ j . Để đảm bảo khả năng cạnh tranh trên thị trường, cần thiết rằng $p_j x_j = \alpha_j, j = 1, \dots, n$, trong đó $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ là các số cho trước. Bài toán đặt ra là tìm một phương án hoạt động khả thi, tức là tìm một vectơ $(x, p) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n$, thỏa mãn hệ (6)-(8). Vectơ α được gọi là vectơ phân bổ nguồn lực.

Ký hiệu X là tập các vectơ $x \in \mathbb{R}_+^n$, thỏa mãn (6) và P là tập các vectơ $p \in \mathbb{R}_+^n$, thỏa mãn (7). Để thấy cả X và P là các tập lồi compact.

Tiếp theo, chúng ta xét bài toán mở rộng của (6)-(8) (xem [3]) khi công ty có $k \geq 1$ nguồn lực được sử dụng để sản xuất n sản phẩm trong m nhà máy, với μ_r là giá trị của nguồn lực thứ r ($r = 1, \dots, k$). Không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết rằng $\sum_{r=1}^k \mu_r = 1$.

Giả sử α_j^r là phần nguồn lực thứ r được phân bổ cho việc sản xuất sản phẩm thứ j và toàn bộ các nguồn lực được sử dụng hết, khi đó ta có

$$0 \leq \alpha_j^r \leq 1, \sum_{j=1}^n \alpha_j^r = 1, \quad r = 1, \dots, k. \quad (9)$$

Vectơ $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_+^n$ với $\alpha_j = \sum_{r=1}^k \mu_r \alpha_j^r$ (tổng giá trị các nguồn lực được sử dụng để sản xuất sản phẩm thứ j), $j = 1, \dots, n$, được gọi là vectơ phân bổ các nguồn lực. Đặt S là tập gồm tất cả các vectơ phân bổ các nguồn lực.

Ứng với mỗi vectơ phân bổ các nguồn lực $\alpha \in \Delta$, vectơ $x \in \mathbb{R}_+^n$ thỏa mãn (6)-(8) sẽ được gọi là một phương án sản xuất. Vectơ $p = (p_1, \dots, p_n)$ với p_j là tổng giá trị các nguồn lực được sử dụng để sản xuất một đơn vị hàng hóa thứ j (tức là giá vốn sản xuất của đơn vị hàng hóa thứ j) sẽ được gọi là vectơ chi phí sản xuất đơn vị.

Bài toán đặt ra là tìm phương án sản xuất $x \in \mathbb{R}_+^n$ và vectơ chi phí sản xuất đơn vị $p \in \mathbb{R}_+^n$, thỏa mãn $(p_1x_1, \dots, p_nx_n) \in S$. Điều đó có nghĩa là chúng ta cần giải hệ sau:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^m \theta_i a^i, \quad \theta_i \geq 0 \quad \forall i, \quad \sum_{i=1}^m \theta_i = 1, \\ p_j &\geq 0 \quad \forall j, \quad p^T a^i \leq 1 \quad \forall i, \\ p_j x_j &= \alpha_j \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ \alpha &= (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in S. \end{aligned}$$

Chúng ta xét bài toán tối ưu với các ràng buộc phân bổ nguồn lực

$$\max F(q, x) \text{ v.đ.k} \quad (10)$$

$$x = \sum_{i=1}^m \theta_i a^i, \quad \theta_i \geq 0 \quad \forall i, \quad \sum_{i=1}^m \theta_i = 1 \quad (11)$$

$$p_j \geq 0 \quad \forall j, \quad p^T a^i \leq 1 \quad \forall i, \quad (12)$$

$$p_j x_j = \alpha_j \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (13)$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in S. \quad (14)$$

trong đó $F(q, x)$ là hàm liên tục trên $Q \times X$, tựa lồi theo q và tựa lõm chặt theo x . (Ví dụ như: $F(q, x) = \sum_{i=1}^n q_i \ln x_i = \ln \prod_{i=1}^n x_i^{q_i}$), Q được xác định như trong mục 2, nghĩa là Q là tập lồi compact trong $\mathbb{R}_+^n$ sao cho với mỗi $q \in Q$ tồn tại $x \in X$: sao cho $F(q, x) \geq \omega$, ω là hằng số dương cho trước.

Hệ ràng buộc (11)-(14) là phi tuyến và việc giải hệ được quy về giải bài toán tối ưu vectơ sau(xem [2]):

$$\inf_r(x) \rightarrow \max_{r=1, 2, \dots, k}, \quad \text{v.đ.k } x \in X, \quad (15)$$

trong đó

$$\inf_r(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j^r \ln x_j, \quad r = 1, 2, \dots, k.$$

Để thấy, $\inf_r(x)$ là hàm liên tục và lõm chặt, $r = 1, 2, \dots, k$.

Ký hiệu X_E là tập nghiệm hữu hiệu Pareto của bài toán (15). Khi đó bài toán (10)-(14) tương đương với bài toán sau:

$$\max \{F(q, x) \mid x \in X_E\}. \quad (16)$$

Định lý 3.1. *Tồn tại vectơ $x^* \in X_E$ sao cho $F(q, x^*) \geq \omega$ với mọi $q \in Q$.*

Chứng minh. Vì các hàm mục tiêu của bài toán (15) là liên tục, lõm chặt và $F(q, x)$ là hàm liên tục trên $Q \times X$, tựa lồi theo q và tựa lõm chặt theo x . Áp dụng Định lý 2.4 ta chỉ ra tồn tại $x^* \in X_E$ sao cho $F(q, x^*) \geq \omega$ với mọi $q \in Q$. $\square$

KẾT LUẬN

Trong bài báo này, nhờ vào định lý min-max chúng tôi chỉ ra rằng tồn tại một phương án $x^* \in Q$ (Q là một tập lồi compact trong $\mathbb{R}_+^n$ sao cho với mỗi giá bán $q \in Q$ tồn tại một phương án $x \in M$ thỏa mãn $F(q, x) \geq \omega$) sao cho lợi nhuận tại đó $F(q, x^*) \geq \omega$ với mọi $q \in Q$, ω là một hằng số dương. Với phương án x^* sẽ đảm bảo sự hoạt động ổn định của công ty trong thời gian nhất định mà không cần điều chỉnh phương án sản xuất, mặc dù giá bán có thể biến động theo thị trường.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. J. von Neumann (1937), "Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine

Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes", *Math. Kolloq. Wie Ergebn.*, 8, 73-83

2. P. T. Thach and T. V. Thang (2011), "Conjugate duality for vector-maximization problems", *J. Math. Anal. Appl.*, (376)1, 94-102.

3. P. T. Thach and T. V. Thang (2014),

"Problem with resources allocation constraints and optimization over the efficient set", *J. Global Optim.*, 58, 481-495.

4. H. Tuy, Minimax (2008), "Existence and Stability", *Pareto Optimality, Game Theory And Equilibria Springer Optimization and Its Applications* 17, 3-21.

Summary

Applications of Minimax Theorem in Optimization Problem with Resources Allocation Constraints

Tran Van Thang

Electric Power University.

Phone: 0983420580. Email: thangtv@epu.edu.com.

Abstract

In this article, we apply von Neumann's minimax theorem and lopsided minimax theorem of Professor Hoang Tuy to research optimization problem with resources allocation constraints. We show that there exists an activity vector x^* in set of all activity vector satisfying resources allocation constraints so that the profit at activity vector x^* no less than ω whatever sale price $q \in Q$ may be, ω is a given constant.

Keyword: *Minimax theorem; Efficient solution; Resources allocation constraint; Vector optimization, Profit function.*

Ngày nhận bài: 06/11/2018; **Ngày hoàn thiện:** 27/11/2018; **Ngày duyệt đăng:** 30/11/2018