

ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU KHÔNG LỖI

Trần Văn Thắng

Trường Đại học Điện lực.

Số điện thoại: 0983420580. Email: thangtv@epu.edu.vn

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng khái niệm tựa liên hợp f^* của f trên cơ sở khái niệm đã đưa ra bởi Phan Thiên Thạch (2011). Đưa ra khái niệm tựa dưới vi phân và điều kiện tối ưu dưới dạng Karush-Kuhn-Tucker mở rộng cho bài toán tối ưu với hàm mục tiêu tựa lồi.

Từ khóa: Tựa liên hợp; Tựa dưới vi phân; Điều kiện tối ưu.

1 Mở đầu

Xét điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu không lồi là một bài toán mở, có nhiều ứng dụng thực tế và được nhiều nhà toán quan tâm nghiên cứu như R. T. Rockafellar ([1]), Y. Sawaragi ([2]), Hoàng Tuy ([7]), Phan Thiên Thạch ([3]-[6]), ... Cho đến nay các nhà toán học mới chỉ đưa ra được điều kiện tối ưu cho một số lớp các bài toán thỏa mãn một số điều kiện nào đó, trong trường hợp tổng quát việc có được điều kiện tối ưu là khó khăn, do vậy đây vẫn là những bài toán mở cần được nghiên cứu.

Trong bài báo [5], Phan Thiên Thạch đã đưa ra khái niệm hàm tựa liên hợp của hàm $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$f^*(x) = \min\{t : p \in tL^*\}, \forall p \in \mathbb{R}_+^n,$$

trong đó $L = \{x \in \mathbb{R}_+^n : f(x) \leq 1\}$ và L^* là tập liên hợp dưới của X trong $\mathbb{R}_+^n$, nghĩa là $L^* = \{p \in \mathbb{R}_+^n : p^T x \leq 1 \forall x \in L\}$. Ứng dụng khái niệm đưa ra Phan Thiên Thạch đã thu được điều kiện tối ưu cho các bài

toán tối ưu với hàm mục tiêu là các hàm tăng, liên tục, thuần nhất, bậc, lồi và nhận giá trị hữu hạn trên $\mathbb{R}_+^n$.

Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng khái niệm tựa liên hợp f^* của f trên cơ sở khái niệm đã đưa ra bởi Thạch trong bài báo [5] cho lớp hàm tăng chặt, liên tục, tựa lồi, nhận giá trị hữu hạn trên $\mathbb{R}_+^n$ và đưa ra điều kiện tối ưu dưới dạng Karush-Kuhn-Tucker (KKT) mở rộng cho bài toán tối ưu tựa lồi.

2 Hàm tựa liên hợp

Trong mục này, chúng tôi luôn giả thiết rằng $f(x)$ là hàm tăng chặt, liên tục, tựa lồi, nhận giá trị hữu hạn trên $\mathbb{R}_+^n$ và $0 = f(0) < f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$. Lớp hàm này bao hàm lớp các hàm tăng, thuần nhất, liên tục, bậc, lồi và nhận giá trị hữu hạn trên $\mathbb{R}_+^n$.

Do $f(x)$ không thuần nhất nên khái niệm hàm tựa liên hợp được đưa ra trong [5]

không còn phù hợp, do vậy ta cần mở rộng khái niệm hàm tựa liên hợp f^* của f . Đặt $L_\alpha = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid f(x) \leq \alpha\}$. Khi đó, hàm f có thể được xác định qua các tập mức dưới, nghĩa là $f(x) = \inf\{\alpha \geq 0 \mid x \in L_\alpha\}$.

Định nghĩa 1. Hàm tựa liên hợp của f là $f^* : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho

$$f^*(p) = \inf\{\alpha \geq 0 \mid p \in (L_{\frac{1}{\alpha}})^*\} \quad \forall p \in \mathbb{R}_+^n, \quad (1)$$

(quy ước $\frac{1}{0} = +\infty$, $L_{\frac{1}{0}} = \mathbb{R}_+^n$).

Example 1. (xem [5]) Cho f là hàm tuyến tính trên $\mathbb{R}_+^n$: $f(x) = c^T x$, với $c > 0$. Khi đó, ta có $f^*(p) = \max\{\frac{p_j}{c_j} \mid j = 1, 2, \dots, n\}$.

Tiếp theo, ta nghiên cứu các tính chất của hàm f^* .

Mệnh đề 1. Hàm f^* hữu hạn trên $\mathbb{R}_+^n$ và $0 = f^*(0) < f^*(p)$ với mọi $p \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$.

Chứng minh Để thấy $(L_{\frac{1}{0}})^* = \{0\}$, và do đó $f^*(0) = 0$. Cho $p \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$. Nếu $f^*(p) = 0$ thì $f^*(p) < \epsilon$ với mọi $\epsilon > 0$, điều này dẫn tới tồn tại $\alpha > 0$ sao cho $\alpha < \epsilon$ và

$$\begin{aligned} p &\in (L_{\frac{1}{\alpha}})^* \\ \Leftrightarrow p^T x &\leq 1 \quad \forall x \geq 0 \text{ thỏa } f(x) \leq \frac{1}{\alpha} \\ \Leftrightarrow f(x) &> \frac{1}{\alpha} \quad \forall x \geq 0 \text{ thỏa } p^T x > 1 \end{aligned} \quad (2)$$

Cho $\bar{x} \geq 0$ thỏa mãn $p^T \bar{x} = 1$. Đặt $x^k = (1 + \frac{1}{k})\bar{x}$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*$, ta có $p^T x^k > 1$. Theo (2) ta suy ra $f(x^k) > \frac{1}{\alpha}$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*$. Cho $k \rightarrow +\infty$ ta nhận được $f(\bar{x}) \geq \frac{1}{\alpha}$. Do đó $f(x) \geq \frac{1}{\alpha}$ với mọi $x \geq 0$ thỏa mãn $p^T x \geq 1$. Điều này tương đương với

$$\inf\{f(x) : p^T x \geq 1, x \geq 0\} \geq \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\epsilon}.$$

Cho $\epsilon \rightarrow 0$ ta nhận được $\inf\{f(x) : p^T x \geq 1, x \geq 0\} = +\infty$. Điều này vô lý vì luôn

tồn tại $\hat{x} \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$ thỏa mãn $p^T \hat{x} \geq 1$ và $\inf\{f(x) : p^T x \geq 1, x \geq 0\} \leq f(\hat{x}) \neq +\infty$. Do đó $f^*(p) > 0$ với mọi $p \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$.

Tiếp theo, ta chỉ ra $f^*(p)$ là hữu hạn trên $\mathbb{R}_+^n$. Giả sử tồn tại $p \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$ sao cho $f^*(p) = +\infty$. Khi đó, không tồn tại số thực $\alpha \geq 0$ sao cho $p \in (L_{\frac{1}{\alpha}})^*$ điều này tương đương với mỗi $\alpha \geq 0$ tồn tại $x' \geq 0$ sao cho $p^T x' = t > 1$ và $f(x') \leq \frac{1}{\alpha}$. Đặt $x = \frac{1}{t}x'$, ta có $p^T x = 1$ và $f(x) \leq f(x') \leq \frac{1}{\alpha}$ (do $f(x)$ là hàm tăng). Chọn dãy $\{\alpha^k\}$ trong $\mathbb{R}_+$ thỏa mãn $\alpha^k \rightarrow +\infty$, khi đó, tồn tại dãy $\{x^k\}$ trong $\mathbb{R}_+^n$ sao cho $p^T x^k = 1$ và $f(x^k) \leq \frac{1}{\alpha^k}$.

Nếu $p > 0$ ta có thể giả sử rằng $x^k \rightarrow \bar{x}$ (do $\{x \in \mathbb{R}_+^n \mid p^T x = 1\}$ là tập compact). Cho $k \rightarrow +\infty$, từ đẳng thức $p^T x^k = 1$ ta thu được $p^T \bar{x} = 1$. Từ $f(x^k) \leq \frac{1}{\alpha^k}$ và tính liên tục $f(x)$ ta có

$$f(\bar{x}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x^k) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha^k} = 0.$$

Suy ra $\bar{x} = 0$, điều này mâu thuẫn với $p^T \bar{x} = 1$.

Nếu p là véc tơ không dương, ta đặt $I = \{i \mid p_i = 0, i = 1, 2, 3, \dots, n\}$. Chọn y^k sao cho $y_i^k = 0$ với mọi $i \in I$ và $y_i^k = x_i^k$ với mọi $i \notin I$. Với mọi k ta có $p^T y^k = p^T x^k = 1$ và $f(y^k) \leq f(x^k) \leq \frac{1}{\alpha^k}$ (do $f(x)$ là hàm tăng). Vì $\{x \in \mathbb{R}_+^n \mid p^T x = 1, x_i = 0 \forall i \in I\}$ là tập compact, ta có thể giả thiết rằng $y^k \rightarrow \bar{y}$. Bằng cách chứng minh tương tự như ở trên ta cũng thu được $\bar{y} = 0$ và $p^T \bar{y} = 1$. Điều này vô lý. $\square$

Ký hiệu L_γ^h là tập mức dưới của f^* , nghĩa là $L_\gamma^h = \{p \in \mathbb{R}_+^n : f^*(p) \leq \gamma\}$. Chúng ta có mệnh đề sau

Mệnh đề 2. Các tập mức dưới $L_{\frac{1}{\gamma}}^h$ và L_γ là liên hợp dưới của nhau với mọi $\gamma \geq 0$.

Chứng minh Để thấy $L_{\frac{1}{0}}^h$ và L_0 là liên

hợp dưới của nhau. Với $\gamma > 0$, ta chứng minh rằng

$$L_{\frac{1}{\gamma}}^h = \{p \in \mathbb{R}_+^n : p^T x \leq 1 \forall x \in L_\gamma\}. \quad (3)$$

Cho $p \in L_{\frac{1}{\gamma}}^h$, ta có $p \geq 0$ và $f^*(p) \leq \frac{1}{\gamma}$, hay $\inf\{\alpha \geq 0 \mid p \in (L_{\frac{1}{\alpha}})^*\} \leq \frac{1}{\gamma}$.

Nếu $\inf\{\alpha \geq 0 \mid p \in (L_{\frac{1}{\alpha}})^*\} < \frac{1}{\gamma}$ thì tồn tại số thực khác không $\bar{\alpha}$ sao cho $\bar{\alpha} \leq \frac{1}{\gamma}$ và $p \in (L_{\frac{1}{\bar{\alpha}}})^*$, điều này tương đương với $\frac{1}{\bar{\alpha}} \geq \gamma$ and $p^T x \leq 1$ với mọi x trong $L_{\frac{1}{\bar{\alpha}}}$. Vì $L_\gamma \subset L_{\frac{1}{\bar{\alpha}}}$ ta có $p^T x \leq 1$ với mọi x trong L_γ .

Nếu $\inf\{\alpha \geq 0 \mid p \in (L_{\frac{1}{\alpha}})^*\} = \frac{1}{\gamma}$ thì với mọi $\epsilon > 0$ ta có $\inf\{\alpha \geq 0 \mid p \in (L_{\frac{1}{\alpha}})^*\} < \frac{1}{\gamma} + \epsilon$.

Bằng cách chứng minh tương tự như trên ta có $p^T x \leq 1$ với mọi x trong $L_{\frac{\gamma}{1+\gamma\epsilon}}$. Do đó, với mọi $\epsilon > 0$ thì

$$p^T x \leq 1 \forall x \geq 0, \quad f(x) \leq \frac{\gamma}{1+\gamma\epsilon} \quad (4)$$

Cho $\bar{x} \geq 0$, $\bar{x} \neq 0$ và $f(\bar{x}) \leq \gamma$, ta chứng minh rằng $p^T \bar{x} \leq 1$. Nếu $\bar{x} > 0$ ta chọn dãy $\{x^k\}$, $x^k = (1 - \frac{1}{k})\bar{x}$. Dãy này thỏa mãn $x^k \rightarrow \bar{x}$ và $f(x^k) < f(x^{k+1}) < f(\bar{x}) \leq \gamma$ với mọi k (do f là hàm tăng chặt). Với mỗi k , do $f(x^k) < \gamma$ nên tồn tại $\epsilon_k > 0$ sao cho $f(x) \leq \frac{\gamma}{1+\gamma\epsilon_k}$, và do đó $p^T x^k \leq 1$ bởi (4). Cho $k \rightarrow +\infty$, từ các bất đẳng thức $p^T x^k \leq 1$ và $f(x^k) < \gamma$ ta nhận được $p^T \bar{x} \leq 1$ và $f(\bar{x}) \leq \gamma$. Nếu $\bar{x}$ là véc tơ không dương, ta chọn dãy $\{x^k\}$, $x^k = \frac{1}{k}\hat{x} + (1 - \frac{1}{k})\bar{x}$ với $\hat{x} > 0$ và $f(\hat{x}) \leq \gamma$ (ta chọn được $\hat{x}$ vì f liên tục và $f(0) = 0$). Vì f tựa lồi, $f(x^k) \leq \gamma$ với mọi k . Bằng cách chứng minh tương tự như ở trên, ta chứng minh được $p^T x^k \leq 1$ với mọi k . Cho $k \rightarrow +\infty$ ta nhận được $p^T \bar{x} \leq 1$ và $f(\bar{x}) \leq \gamma$. Do đó $L_{\frac{1}{\gamma}}^h \subset \{p \in \mathbb{R}_+^n : p^T x \leq 1 \forall x \in L_\gamma\}$.

Đảo lại, cho $p \in \{p \in \mathbb{R}_+^n : p^T x \leq 1 \forall x \in L_\gamma\}$. Khi đó $p \in (L_\gamma)^* = (L_{\frac{1}{\gamma-1}})^*$, suy ra

$$f^*(p) = \inf\{\alpha \geq 0 \mid p \in (L_{\frac{1}{\alpha}})^*\} \leq \frac{1}{\gamma}. \text{ Do đó}$$

$$L_{\frac{1}{\gamma}}^h \supset \{p \in \mathbb{R}_+^n : p^T x \leq 1 \forall x \in L_\gamma\}.$$

Tiếp theo, ta chỉ ra L_γ là liên hợp dưới của $L_{\frac{1}{\gamma}}^h$. Đặt

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}_+^n : p^T x \leq 1 \forall p \in L_{\frac{1}{\gamma}}^h\right\}.$$

Vì $L_{\frac{1}{\gamma}}^h$ là liên hợp dưới của L_γ , suy ra $L_\gamma \subseteq A$. Giả sử $\bar{x} \geq 0$ và $\bar{x} \notin L_\gamma$. Do f là hàm tăng nên ta có $\bar{x} \notin L_\gamma - \mathbb{R}_+^n$. Vì f liên tục và tựa lồi nên L_γ là tập lồi đóng. Theo định lý tách, tồn tại $q \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ và số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho

$$q^T x < \alpha \quad \forall x \in L_\gamma - \mathbb{R}_+^n, \quad (5)$$

$$q^T \bar{x} > \alpha. \quad (6)$$

Giả sử $q_i < 0$ với $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Lấy $x^0 \in L_\gamma$ ta có $x^k = (x_1^0, \dots, x_i^0 - k, \dots, x_n^0) \in L_\gamma - \mathbb{R}_+^n$ với mọi $k \in \mathbb{R}_+^n$, suy ra $q^T x^k \rightarrow +\infty$ khi $k \rightarrow +\infty$. Điều này mâu thuẫn với (5). Do đó, ta có $q \geq 0$ và $\alpha > 0$ bởi (5). Đặt $p = \frac{1}{\alpha}q$, ta có thể viết

$$p^T x < 1 \quad \forall x \in L_\gamma - \mathbb{R}_+^n, \quad (7)$$

$$p^T \bar{x} > 1. \quad (8)$$

Từ (7) ta suy ra $p^T x < 1 \quad \forall x \in L_\gamma$, theo (3) ta có $p \in L_{\frac{1}{\gamma}}^h$. Điều này cùng với (8) dẫn tới $\bar{x} \notin A$. $\square$

Chúng ta dễ dàng chứng minh được các mệnh đề sau.

Mệnh đề 3. Hàm f cũng là tựa liên hợp của f^* , nghĩa là

$$f(x) = \inf\{\alpha \geq 0 \mid x \in (L_{\frac{1}{\alpha}}^h)^*\}.$$

Mệnh đề 4. Hàm f^* nửa liên tục dưới, tăng, tựa lồi, trên $\mathbb{R}_+^n$.

Mệnh đề 5. *Chúng ta có*

$$f^*(p) = \frac{1}{\inf\{f(x) : p^T x \geq 1, x \geq 0\}} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\inf\{f^*(p) : p^T x \geq 1, p \geq 0\}}. \quad (10)$$

3 Điều kiện tối ưu

Sau đây, chúng ta đưa ra khái niệm tựa dưới vi phân của hàm tựa lồi. Véc tơ $p \in \mathbb{R}_+^n$ được gọi là *tựa dưới gradient* của f tại x nếu

$$p^T x = 1 \text{ và } f(x)f^*(p) \leq 1.$$

Ký hiệu $\partial^* f(x)$ là tập gồm tất cả các tựa dưới gradient của f tại x và gọi $\partial^* f(x)$ là tựa dưới vi phân của f tại x . Nếu $\partial^* f(x)$ khác rỗng, ta nói f khả tựa dưới vi phân tại x .

Định lý 1. *Nếu $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ là hàm tăng chặt, liên tục, tựa lồi và $0 = f(0) < f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$, thì $\partial^* f(x)$ là tập lồi khác rỗng với mọi $x \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$.*

Chứng minh Cho $x \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$. Vì f là hàm tựa lồi, liên tục, tăng trên $\mathbb{R}_+^n$ và $f(x) > 0$ nên $L_{f(x)}$ là tập lồi đóng có phần trong khác rỗng. Giả sử tồn tại hình cầu mở B tâm x sao cho $B \subset L_{f(x)}$. Khi đó, tồn tại $\hat{x} \in B$ sao cho $\hat{x} > x$. Vì f tăng chặt nên ta có $f(\hat{x}) > f(x)$, điều này mâu thuẫn với $\hat{x} \in L_{f(x)}$. Do đó, x là điểm biên của $L_{f(x)}$. Để thấy, x cũng là biên của $L_{f(x)} - \mathbb{R}_+^n$ bởi f là hàm tăng. Theo định lý tách, tồn tại véc tơ $q \neq 0$ và số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho

$$q^T z \leq \alpha \quad \forall z \in L_{f(x)} - \mathbb{R}_+^n, \quad (11)$$

$$q^T x = \alpha. \quad (12)$$

Từ (11) suy ra $q \geq 0$, và do đó $\alpha > 0$ (vì $\text{int} L_{f(x)} \neq \emptyset$). Đặt $p = \frac{1}{\alpha} q$, ta có $p \geq 0$ và

$$p^T z \leq 1 \quad \forall z \in L_{f(x)}, \quad (13)$$

$$p^T x = 1. \quad (14)$$

Từ (13) và Mệnh đề 2 ta có $p \in L_{\frac{1}{f(x)}}^*$, và do đó $f^*(p)f(x) \leq 1$. Điều này cùng với (14) kéo theo $p \in \partial^* f(x)$. Tính lồi của $\partial^* f(x)$ được suy ra từ định nghĩa của tựa dưới gradient. $\square$

Từ chứng minh của định lý trên ta thu được mệnh đề sau

Mệnh đề 6. *Cho $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ là hàm tăng chặt, liên tục, tựa lồi và $0 = f(0) < f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$. Điều kiện đủ để $p \in \partial^* f(x)$ là $p^T x = 1$ và $p^T z \leq 1$ với mọi $z \in L_{f(x)}$.*

Tiếp theo, ta xét bài toán tối ưu sau

$$\min f(x), \quad \text{v.đ.k } x \in X, \quad (15)$$

trong đó $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ là hàm tăng chặt, liên tục, bức, tựa lồi và $0 = f(0) < f(x)$; $X \subset \mathbb{R}_+^n$ là tập lồi đóng trong $\mathbb{R}_+^n$ và $0 \notin X$.

Chúng ta nhắc lại rằng hàm f là bức trên $\mathbb{R}_+^n$ nếu

$$f(x) \rightarrow +\infty \text{ khi } x \in \mathbb{R}_+^n, \|x\| \rightarrow +\infty.$$

Vì f liên tục, bức trên $\mathbb{R}_+^n$ và X là tập đóng khác rỗng nên bài toán (15) có nghiệm. Nếu X là tập các véc tơ sản xuất và f là hàm chi phí, khi đó (15) là bài toán tìm phương án sản xuất $x \in X$ sao cho chi phí sản xuất là nhỏ nhất. Chú ý rằng lớp các hàm thỏa mãn bài toán (15) bao hàm phần lớn các hàm chi phí trong kinh tế.

Sau đây, chúng ta sử dụng khái niệm tựa dưới vi phân để đưa ra điều kiện cần và đủ tối ưu dưới dạng KKT mở rộng cho bài toán (15).

Với $\bar{x} \in X$ ký hiệu $N(\bar{x}, X)$ là nón pháp tuyến của X tại $\bar{x}$, nghĩa là

$$N(\bar{x}, X) = \{p : p^T(x - \bar{x}) \leq 0 \forall x \in X\}.$$

Định lý 2. Véc tơ $\bar{x} \in X$ là nghiệm tối ưu của (15) nếu và chỉ nếu $\bar{x}$ thỏa mãn điều kiện KKT mở rộng sau

$$0 \in \partial^* f(\bar{x}) + N(\bar{x}, X). \quad (16)$$

Chứng minh Giả sử $\bar{x} \in X$ và (16) đúng. Khi đó tồn tại véc tơ $p \in \partial^* f(\bar{x})$ sao cho $-p \in N(\bar{x}, X)$. Vì $p \in \partial^* f(\bar{x})$, ta có $p^T \bar{x} = 1$ và $f^*(p)f(\bar{x}) = 1$. Vì $-p \in N(\bar{x}, X)$ nên ta có $p^T(x - \bar{x}) \geq 0$ với mọi $x \in X$, và do đó $p^T x \geq 1$ với mọi $x \in X$. Theo Mệnh đề 5, ta có

$$f^*(p)f(x) \geq 1, \forall x \in X, p \in P.$$

Điều này cùng với $p \in \partial^* f(\bar{x})$ suy ra

$$\begin{aligned} f^*(p)f(\bar{x}) &= \min\{f^*(p)f(x) : x \in X\} \\ &= f^*(p) \min_{x \in X} f(x), \end{aligned}$$

hệ quả là $f(\bar{x}) = \min_{x \in X} f(x)$. Vì vậy $\bar{x}$ là nghiệm tối ưu của (15).

Đảo lại, giả sử $\bar{x}$ là nghiệm tối ưu của (15). Vì f là hàm tăng, liên tục, tựa lồi trên $\mathbb{R}_+^n$ và $f(\bar{x}) > 0$ nên $L_{f(\bar{x})}$ là tập lồi, đóng và có phần trong khác rỗng. Chúng ta cần chỉ ra $\text{int} X \cap \text{int} L_{f(\bar{x})} = \emptyset$. Thực vậy, giả sử tồn tại hình cầu mở B tâm x^0 sao cho $B \subset X \cap L_{f(\bar{x})}$. Khi đó $f(x) = f(\bar{x})$ với mọi $x \in B$. Mặt khác, với $x^* \in B$ thỏa mãn $x^* < x^0$ thì ta có $f(x^*) < f(x^0) = f(\bar{x})$ (vì f là hàm tăng chặt), điều này vô lý. Do đó, $\text{int} X \cap \text{int} L_{f(\bar{x})} = \emptyset$. Vì f là hàm tăng chặt nên $\text{int}(X + \mathbb{R}_+^n) \cap \text{int} L_{f(\bar{x})} = \emptyset$. Theo định lý tách, tồn tại véc tơ $q \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$ và số thực α sao cho

$$q^T x \leq \alpha \forall x \in L_{f(\bar{x})}; \quad (17)$$

$$q^T x \geq \alpha \forall x \in X + \mathbb{R}_+^n. \quad (18)$$

Từ (18) ta có $q \geq 0$. Từ (17) ta có $\alpha > 0$ bởi $\text{int} L_{f(\bar{x})} \neq \emptyset$. Đặt $p = \frac{1}{\alpha} q$, ta có

$$p^T x \leq 1 \forall x \in L_{f(\bar{x})}; \quad (19)$$

$$p^T x \geq 1 \forall x \in X. \quad (20)$$

Suy ra $p^T \bar{x} = 1$. Điều này cùng với (19) dẫn tới $p \in \partial^* f(\bar{x})$ bởi Mệnh đề 6. Từ (20) và $p^T \bar{x} = 1$ suy ra $-p \in N(\bar{x}, X)$. Do vậy, $0 \in \partial^* f(\bar{x}) + N(\bar{x}, X)$. $\square$

KẾT LUẬN

Trong bài báo này, trên cơ sở khái niệm đã đưa ra bởi Thạch trong bài báo [5], chúng tôi mở rộng khái niệm tựa liên hợp cho lớp hàm tăng chặt, liên tục, tựa lồi, nhận giá trị hữu hạn trên $\mathbb{R}_+^n$ và $0 = f(0) < f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$. Chứng minh một số tính chất của hàm liên hợp như tính tăng, hữu hạn, tựa lồi và tính nửa liên tục dưới. Đưa ra khái niệm tựa dưới vi phân và chứng minh một số tính chất. Đưa ra điều kiện cần và đủ tối ưu dưới dạng KKT mở rộng cho bài toán tối ưu không lồi.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. R. T. Rockafellar (1970), *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
2. Y. Sawaragi, H. Nakayama and T. Tanino (1985), *Theory of Multiobjective Optimization*, Academic Press, Orlando, Florida.
3. P. T. Thạch (1991), "Quasiconjugates of functions, duality relationship between quasiconvex minimization under a reverse convex constraint and quasiconvex maximization under a convex constraint, and applications", *J. Math. Anal. Appl.*, (159)2, pp. 299-322.
4. P. T. Thạch (1993), "Global optimality criterion and duality with zero gap in

nonconvex optimization", *SIAM J. Math. Anal.*, (24)6, pp. 1537-1556.

5. P. T. Thach (2011), "Symmetric duality for homogeneous multiple-objective problems", *J. Optim. Theory Appl.*, DOI 10.1007/s10957-011-9822-6, Published online.

6. P. T. Thach and T. V. Thang (2011), "Conjugate duality for vector-maximization problems", *J. Math. Anal. Appl.*, (376)1, pp. 94-102.

7. H. Tuy (1998), *Convex Analysis and Global Optimization*, Kluwer.

Summary

Optimality Condition for Nonconvex Optimization

Tran Van Thang

Electric Power University.

Phone: 0983420580. Email: thangtv@epu.edu.com.

Abstract

In the present paper, we extend concept of quasi-conjugate f^* of f on the basis concept was defined by Thach (2011). We introduce the concept of quasi-subdifferential for quasiconvex functions and use this concept to obtain an optimality condition in the form of a generalized KKT for a nonconvex problem.

Keyword: *Quasi-conjugate; Quasi-subdifferential; Optimality condition.*

Ngày nhận bài: 25/7/2018; Ngày phản biện: 22/8/2018; Ngày duyệt đăng: 31/8/2018