

ĐỒNG NHẤT THỨC POHOZAEV CHO HỆ PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC SUY BIẾN VÀ ỨNG DỤNG

Phạm Thị Thủy¹, Lê Thị Hồng Hạnh²

¹Trường Đại học Sư phạm - ĐHTH Thái Nguyên, ²Trường Đại học Hoa Lư

TÓM TẮT

Trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu sự không tồn tại nghiệm không tầm thường của hệ

$$\text{phương trình } \begin{cases} \Delta_\gamma u + f(x, u, v) = 0 \text{ trong } \Omega \\ \Delta_\gamma v + g(x, u, v) = 0 \text{ trong } \Omega \\ u = v = 0 \text{ trên } \partial\Omega \end{cases}$$

ở đây Ω là một miền bị chặn với biên trơn trong không gian $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) và Δ_γ là toán tử elliptic

$$\text{suy biến có dạng } \Delta_\gamma u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\gamma_i^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \right),$$

trong đó $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$ thỏa mãn một số điều kiện cho trước. the given tolerance Kết quả này là sự tổng quát trong bài báo của N. M. Chuong; T. D. Ke [N. M. Chuong; T. D. Ke (2004), *Existence of solutions for a nonlinear degenerate elliptic system. Electron. J. Differential Equations*, no. 93, 15 pp.] cho toán tử Δ_γ .

Từ khóa: nghiệm không tầm thường, toán tử Δ_γ , hệ phương trình elliptic suy biến, đồng nhất thức kiểu Pohozaev, hệ Hamiltonian

GIỚI THIỆU

Trong [2] và [4] đã đưa ra khái niệm toán tử

Δ_γ như sau $\Delta_\gamma := \sum_{i=1}^N \partial_{x_i} (\gamma_i^2 \partial_{x_i})$ với

$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}^N$ thỏa mãn điều kiện sau:

1. Tồn tại một nhóm $(\delta_t)_{t>0}$ thỏa mãn

$$\delta_t : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N,$$

$$\delta_t(x) = \delta_t(x_1, x_2, \dots, x_N) = (t^{\varepsilon_1} x_1, t^{\varepsilon_2} x_2, \dots, t^{\varepsilon_N} x_N),$$

với

$$1 = \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \dots \leq \varepsilon_N, \gamma_i(\delta_t(x)) = t^{\varepsilon_i - 1} \gamma_i(x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \forall t > 0, i = 1, \dots, N;$$

2. $\gamma_1 = 1, \gamma_i(x) = \gamma_i(x_1, \dots, x_{i-1}), i = 2, \dots, N;$

3. Tồn tại hằng số $\rho \geq 0$ thỏa mãn

$$0 \leq x_k \partial_{x_k} \gamma_i(x) \leq \rho \gamma_i(x),$$

$$\forall k \in \{1, \dots, i-1\}, \forall i = 2, \dots, N, x \in \mathbb{R}_+^N;$$

4. Với mỗi

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}_+^N, x^* = (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|).$$

Giả sử Ω là một miền bị chặn với biên trơn trong không gian $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) và $0 \in \Omega$. Chúng ta xét bài toán Dirichlet sau:

$$\begin{cases} \Delta_\gamma u + f(x, u, v) = 0 \text{ trong } \Omega \\ \Delta_\gamma v + g(x, u, v) = 0 \text{ trong } \Omega \\ u = v = 0 \text{ trên } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

ở đây $f(x, y, z), g(x, y, z)$ là các hàm liên tục thỏa mãn các điều kiện cho trước. Đặt

$$\tilde{N} = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i, T = (\varepsilon_1 x_1, \varepsilon_2 x_2, \dots, \varepsilon_N x_N),$$

$$Tu = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i x_i \partial_{x_i} u := \varepsilon_i x_i \partial_{x_i} u, v_\gamma = (\gamma_1 v_1, \gamma_2 v_2, \dots, \gamma_N v_N).$$

Định nghĩa: Miền Ω được gọi là δ_t hình sao tại 0 nếu $0 \in \Omega$ và $(T, v) \geq 0$, với mọi điểm trên $\partial\Omega$, v là vecto pháp tuyến ngoài của Ω .

S1) Tồn tại hàm $H(x, u, v) \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^2)$ thỏa mãn:

$$\partial_v H = f, \partial_u H = g, H(x, 0, 0) = 0, \forall x \in \Omega.$$

Trong trường hợp

$$\gamma = (1, 1, \dots, 1, |x^{(1)}|^k, \dots, |x^{(1)}|^k)$$

* Tel: 0913 005027

$$\text{với } k \in i, x^{(1)} = (x_1, \dots, x_{N_1}), |x^{(1)}| = \sqrt{\sum_{j=1}^{N_1} x_j^2}$$

có N_1 số 1 và $N - N_1$ số 0 kết quả của bài báo đã được trình bày trong [2] và [3].

Trong bài báo này chúng tôi chỉ ra đồng nhất thức Pohozaev đối với hệ phương trình elliptic suy biến và ứng dụng của đồng nhất thức đó đối với sự không tồn tại nghiệm không tầm thường của hệ phương trình elliptic suy biến.

KẾT QUẢ CHÍNH

Định lý 1. Nếu Ω là δ_i hình sao tại 0 và các hàm $f(\dots), g(\dots)$ thỏa mãn điều kiện S1.

Nếu $(u, v) \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$ là nghiệm của Bài toán 1.1. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} & 2\tilde{N} \int_{\Omega} G(X, u) dX + 2 \int_{\Omega} \langle T, \nabla G \rangle dX \\ &= (\tilde{N} - 2) \int_{\Omega} u f(X, u) dX + \int_{\partial\Omega} \langle T, \nu \rangle |\nu_{\gamma}|^2 |\partial_{\nu} u|^2 ds \end{aligned}$$

Chứng minh

Ta có

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \partial_{x_i} (x_i G(X, u)) dX \\ &= \int_{\Omega} G(X, u) dX + \int_{\Omega} x_i (g \partial_{x_i} u + \partial_{x_i} G) dX = 0. \end{aligned}$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} G(X, u) dx = - \int_{\Omega} x_i (g \partial_{x_i} u + \partial_{x_i} G) dX, \\ & \int_{\Omega} \varepsilon_i G(x, u, v) dx \\ &= - \int_{\Omega} \varepsilon_i x_i (g \partial_{x_i} u + f \partial_{x_i} u) dx - \int_{\Omega} \varepsilon_i x_i \partial_{x_i} H dx, \\ & \tilde{N} \int_{\Omega} H(x, u, v) dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \varepsilon_i x_i \partial_{x_i} H dx = - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \varepsilon_i x_i (g \partial_{x_i} u + f \partial_{x_i} u) dx, \\ & \tilde{N} \int_{\Omega} H(x, u, v) dx + \int_{\Omega} \langle T, \nabla H \rangle dx = - \int_{\Omega} (\langle T, \nabla u \rangle g + \langle T, \nabla v \rangle f) dx, \end{aligned}$$

Do u, v là nghiệm của hệ nên ta có:

$$\begin{aligned} & \tilde{N} \int_{\Omega} H(x, u, v) dx + \int_{\Omega} \langle T, \nabla H \rangle dx = \int_{\Omega} (\langle T, \nabla u \rangle \Delta_{\gamma} v + \langle T, \nabla v \rangle \Delta_{\gamma} u) dx \\ &= \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} (\varepsilon_i x_i \partial_{x_i} u \partial_{x_j} (\gamma_j^2 \partial_{x_j} v) + \varepsilon_i x_i \partial_{x_i} v \partial_{x_j} (\gamma_j^2 \partial_{x_j} u)) dx \\ &= \int_{\Omega} (\varepsilon_i x_i \partial_{x_i} u \partial_{x_j} (\gamma_j^2 \partial_{x_j} v) + \varepsilon_i x_i \partial_{x_i} v \partial_{x_j} (\gamma_j^2 \partial_{x_j} u)) dx \end{aligned}$$

Theo công thức Green ta có:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\varepsilon_i x_i \partial_{x_i} u \partial_{x_j} (\gamma_j^2 \partial_{x_j} v) + \varepsilon_i x_i \partial_{x_i} v \partial_{x_j} (\gamma_j^2 \partial_{x_j} u)) dx \\ &= \int_{\partial\Omega} (\varepsilon_i x_i \partial_{x_i} u \gamma_j^2 \partial_{x_j} \nu v_j + \varepsilon_i x_i \partial_{x_i} v \gamma_j^2 \partial_{x_j} u \nu_j) ds \\ &- \int_{\Omega} (\partial_{x_j} (\varepsilon_i x_i \partial_{x_i} u) (\gamma_j^2 \partial_{x_j} v) + \partial_{x_j} (\varepsilon_i x_i \partial_{x_i} v) (\gamma_j^2 \partial_{x_j} u)) dx = I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} I_2 &= - \int_{\Omega} (\varepsilon_j \partial_{x_j} u \gamma_j^2 \partial_{x_j} v + \varepsilon_j \partial_{x_j} v \gamma_j^2 \partial_{x_j} u) dx \\ &- \int_{\Omega} (\varepsilon_i x_i \partial_{x_i} u \gamma_j^2 \partial_{x_j} v + \varepsilon_i x_i \partial_{x_i} v \gamma_j^2 \partial_{x_j} u) dx = I_{21} + I_{22} \\ I_{22} &= - \int_{\partial\Omega} (\varepsilon_i x_i \partial_{x_i} u \gamma_j^2 \partial_{x_j} \nu v_j + \varepsilon_i x_i \partial_{x_i} v \gamma_j^2 \partial_{x_j} u \nu_j) dS \\ &+ \int_{\Omega} (\partial_{x_j} (\varepsilon_i x_i \gamma_j^2 \partial_{x_j} v) \partial_{x_i} u + \partial_{x_j} (\varepsilon_i x_i \gamma_j^2 \partial_{x_j} u) \partial_{x_i} v) dx = -I_1 + I_{23} \\ I_{23} &= \int_{\Omega} (\varepsilon_i \gamma_j^2 \partial_{x_j} v \partial_{x_i} u + \varepsilon_i \gamma_j^2 \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v) dx \\ &+ \int_{\Omega} (\varepsilon_i \gamma_j^2 x_i \partial_{x_i} v \partial_{x_j} u + \varepsilon_i \gamma_j^2 x_i \partial_{x_i} u \partial_{x_j} v) dx \\ &+ \int_{\Omega} (\varepsilon_i x_i \partial_{x_i} (\gamma_j^2) \partial_{x_j} v \partial_{x_j} u + \varepsilon_i x_i \partial_{x_i} (\gamma_j^2) \partial_{x_j} u \partial_{x_j} v) dx \end{aligned}$$

Do hàm γ_i thỏa mãn tính chất 1, 2 nên ta có:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i x_i \partial_{x_i} \gamma_j^2 &= (2\varepsilon_j - 1) \gamma_j^2 \text{ do vậy} \\ I_{23} &= 2\tilde{N} \int_{\Omega} \langle \nabla_{\gamma} u, \nabla_{\gamma} v \rangle dx - I_{22} + 2 \int_{\Omega} (\varepsilon_j - 1) (\gamma_j^2 \partial_{x_j} v \partial_{x_j} u + \gamma_j^2 \partial_{x_j} u \partial_{x_j} v) dx \\ &= (2\tilde{N} - 4) \int_{\Omega} \langle \nabla_{\gamma} u, \nabla_{\gamma} v \rangle dx - I_{22} - 2I_{21} \end{aligned}$$

Nên

$$\begin{aligned} I_{22} &= -I_1 + (2\tilde{N} - 4) \int_{\Omega} \langle \nabla_{\gamma} u, \nabla_{\gamma} v \rangle dx - I_{22} - 2I_{21} \\ \Rightarrow I_{22} + I_{21} &= -\frac{1}{2} I_1 + (\tilde{N} - 2) \int_{\Omega} \langle \nabla_{\gamma} u, \nabla_{\gamma} v \rangle dx \end{aligned}$$

Do vậy

$$\begin{aligned} & \tilde{N} \int_{\Omega} H(x, u, v) dx + \int_{\Omega} \langle T, \nabla H \rangle dx = \frac{1}{2} I_1 + (\tilde{N} - 2) \int_{\Omega} \langle \nabla_{\gamma} u, \nabla_{\gamma} v \rangle dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \langle T, \nu \rangle |\nu_{\gamma}|^2 \partial_{\nu} u \partial_{\nu} v ds + (\tilde{N} - 2) \int_{\Omega} \langle \nabla_{\gamma} u, \nabla_{\gamma} v \rangle dx \end{aligned}$$

Mặt khác do u, v là nghiệm của hệ phương trình nên ta có

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \langle \nabla_{\gamma} u, \nabla_{\gamma} v \rangle dx = \int_{\Omega} v f(x, u, v) dx = \int_{\Omega} u g(x, u, v) ds \\ \Rightarrow \int_{\Omega} \langle \nabla_{\gamma} u, \nabla_{\gamma} v \rangle dx &= \int_{\Omega} t v f(x, u, v) + (1-t) u g(x, u, v) dx, \forall t \in i \end{aligned}$$

Nên ta có điều phải chứng minh.

Sử dụng Định lý 1 ta có hệ quả sau:

Hệ quả 1. Giả sử Ω là δ_i hình sao tại 0 và thỏa mãn điều kiện (S1). Nếu tồn tại $t \in i$ thỏa mãn

$$\bar{N}.H(x,u,v) + \langle T, \nabla H \rangle < (\bar{N} - 2)$$

$$(tf(x,u,v) + (1-t)g(x,u,v)), \forall x \in \Omega, (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Khi đó hệ phương trình không có nghiệm dương thuộc $H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$.

Hệ quả 2. Giả sử Ω là δ_t hình sao tại 0. Nếu bài toán

$$\begin{cases} \Delta_\gamma u + |v|^{p-1}v = 0 \text{ trong } \Omega \\ \Delta_\gamma v + |u|^{q-1}u = 0 \text{ trong } \Omega \\ u = v = 0 \text{ trên } \partial\Omega \end{cases}$$

có nghiệm dương thuộc $H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$ với $p, q \geq 1$. Khi đó ta có

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} \geq \frac{\bar{N}-2}{\bar{N}}.$$

Hệ quả 3. Giả sử Ω là δ_t hình sao tại 0. Nếu $\alpha, \beta \geq 0$ và

$$\frac{1+\alpha}{p+1} + \frac{1+\beta}{q+1} \leq \frac{\bar{N}-2}{\bar{N}}.$$

Khi đó bài toán

$$\begin{cases} \Delta_\gamma u + |x|^\alpha |v|^{p-1}v = 0 \text{ trong } \Omega \\ \Delta_\gamma v + |x|^\beta |u|^{q-1}u = 0 \text{ trong } \Omega \\ u = v = 0 \text{ trên } \partial\Omega \end{cases}$$

không có nghiệm dương thuộc $H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$.

Chứng minh. Giả sử bài toán có nghiệm dương thuộc $H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$

$$\text{Ta có } H(x,u,v) = \frac{1}{p+1}|x|^\alpha |u|^{p+1} + \frac{1}{q+1}|x|^\beta |v|^{q+1}$$

$$\sum_{i=1}^N \varepsilon_i x_i \partial_{x_i} H(x,u,v) < \frac{\alpha \bar{N}}{p+1}|x|^\alpha |u|^{p+1} + \frac{\beta \bar{N}}{q+1}|x|^\beta |v|^{q+1}$$

Do vậy

$$\begin{aligned} & \bar{N} \int_{\Omega} H(x,u,v) dx + \int_{\Omega} \langle T, \nabla H \rangle dx \\ & < \frac{\bar{N} + \bar{N}\alpha}{p+1} \int_{\Omega} |x|^\alpha |u|^{p+1} dx + \frac{\bar{N} + \bar{N}\beta}{q+1} \int_{\Omega} |x|^\beta |v|^{q+1} dx \end{aligned}$$

Do u, v là nghiệm của hệ phương trình nên

$$\int_{\Omega} \langle \nabla_\gamma u, \nabla_\gamma v \rangle dx = \int_{\Omega} |x|^\alpha |v|^{p+1} dx = \int_{\Omega} |x|^\beta |v|^{q+1} dx$$

$$\begin{aligned} & \bar{N} \int_{\Omega} H(x,u,v) dx + \int_{\Omega} \langle T, \nabla H \rangle dx \\ & = (\bar{N} - 2) \int_{\Omega} |x|^\alpha |u|^{p+1} dx + \int_{\partial\Omega} \langle T, v \rangle |v_\gamma|^2 \partial_v u \partial_v v ds \end{aligned}$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} & (\bar{N} - 2) \int_{\Omega} |x|^\alpha |u|^{p+1} dx + \int_{\partial\Omega} \langle T, v \rangle |v_\gamma|^2 \partial_v u \partial_v v ds \\ & < \frac{\bar{N} + \bar{N}\alpha}{p+1} \int_{\Omega} |x|^\alpha |u|^{p+1} dx + \frac{\bar{N} + \bar{N}\beta}{q+1} \int_{\Omega} |x|^\beta |v|^{q+1} dx \\ & \int_{\partial\Omega} \langle T, v \rangle |v_\gamma|^2 \partial_v u \partial_v v ds \\ & < \left(-(\bar{N} - 2) + \frac{\bar{N} + \bar{N}\alpha}{p+1} + \frac{\bar{N} + \bar{N}\beta}{q+1} \right) \int_{\Omega} |x|^\alpha |u|^{p+1} dx < 0 \end{aligned}$$

Mâu thuẫn do u, v là nghiệm dương và Ω là δ_t hình sao tại 0 nên

$$\int_{\partial\Omega} \langle T, v \rangle |v_\gamma|^2 \partial_v u \partial_v v ds \geq 0.$$

Nên ta có điều phải chứng minh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. N. M. Chuong; T. D. Ke (2004), "Existence of solutions for a nonlinear degenerate elliptic system" *Electron. J. Differential Equations*, no. **93**, 15 pp.
2. A. E. Kogoj; E. Lanconelli (2012), "On semilinear Δ_γ -Laplace equation" *Nonlinear Anal.* **75**, no. 12, 4637-4649.
3. T. D. Ke, "Existence of non-negative solutions for a semilinear degenerate elliptic system" *Proceedings of the international conference on Abstract and Applied Analysis* (edited by N.M. Chuong, L. Nirenberg, L. H. Son, W. Tutschke), Hanoi Aug. 2002 (World Scientific 2004).
4. D. T. Luyen, N. M. Tri, "Existence of solutions to boundary value problems for semilinear Δ_γ -differential equations", *Math. Notes* **97** (2015), no. 1, 73-84.

ABSTRACT

POHOZAEV'S IDENTITY FOR A NONLINEAR DEGENERATE ELLIPTIC SYSTEM AND ITS APPLICATIONS**Phạm Thị Thủy^{1*}, Lê Thị Hồng Hạnh²**¹University of Education – TNU, ²Hoa Lu University, Ninh Binh

In this paper, we study the existence of solutions for degenerate elliptic systems

$$\begin{cases} \Delta_\gamma u + f(x, u, v) = 0 & \text{in } \Omega \\ \Delta_\gamma v + g(x, u, v) = 0 & \text{in } \Omega \\ u = v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

where Ω is a bounded domain with smooth boundary in $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$), Δ_γ is the subelliptic operator of the type

$$\Delta_\gamma u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\gamma^2_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right).$$

This result is a generalization of that of N. M. Chuong; T. D. Ke [N. M. Chuong; T. D. Ke (2004), *Existence of solutions for a nonlinear degenerate elliptic system*. *Electron. J. Differential Equations*, no. 93, 15 pp.]

Keywords: non-existence, Δ_γ –Laplace operator, degenerate elliptic equation, Pohozaev's identity, Hamiltonian system

Ngày nhận bài: 13/12/2017; Ngày phản biện: 28/12/2017; Ngày duyệt đăng: 31/5/2018

* Tel: 0913 005027