

TÍNH BẤT BIẾN ĐỒNG LUÂN CỦA ĐỘ PHỨC TẠP TÔPÔ BẬC CAO

Trần Huệ Minh và Nguyễn Văn Ninh

Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên

Tóm tắt

Từ bài toán lập kế hoạch chuyển động của một hệ cơ học trong lý thuyết rôbốt, Rudyak đã đưa ra khái niệm về độ phức tạp tôpô bậc cao của một không gian tôpô. Đây là một khái niệm đo tính liên tục của kế hoạch chuyển động bậc cao. Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh tính bất biến đồng luân của một không gian tôpô. Áp dụng kết quả này, chúng tôi chứng minh sự không đồng phối giữa một số không gian tôpô.

Từ khóa: Kế hoạch chuyển động, độ phức tạp tôpô, nhất cắt, bất biến đồng luân, tương đương đồng luân.

1 Tính bất biến đồng luân

Từ bài toán lập kế hoạch chuyển động của một hệ cơ học. M. Farber đã đưa ra khái niệm về độ phức tạp tôpô như sau. Cho X là một không gian tôpô liên thông đường. Đặt $PX = \{\gamma : [0; 1] \rightarrow X \text{ liên tục}\}$ là không gian các đường đi liên tục trong X với tôpô compact mở. Xét ánh xạ

$$\begin{aligned} \pi : PX &\rightarrow X \times X \\ \gamma &\mapsto (\gamma(0), \gamma(1)). \end{aligned}$$

Định nghĩa 1. [1] Độ phức tạp tôpô của X là số nguyên dương bé nhất $TC(X) = k$ thỏa mãn $X \times X$ có thể phủ bởi k tập mở $U_1, \dots, U_k$ sao cho trên mỗi U_i tồn tại một nhất cắt liên tục $s_i : U_i \rightarrow PX$ tức là $\pi s_i = id_{U_i}$ với mọi $i = 1, \dots, k$.

Nếu không tồn tại số k như trên thì ta nói $TC(X) = \infty$.

Tổng quát hóa khái niệm trên, năm 2010, YB Rudyak đã đưa ra khái niệm về độ phức tạp tôpô bậc cao cho không gian tôpô liên thông đường như sau (xem [3]).

Với mỗi số nguyên $n \geq 2$, đặt $J_n = [0; 1] \vee [0; 1] \vee \dots \vee [0; 1]$ là kết của n đoạn thẳng đơn vị tại điểm 0. Ký hiệu X^{J_n} là tập các ánh xạ liên tục $\gamma : J_n \rightarrow X$. Khi đó X^{J_n} là không gian tôpô với tôpô compact mở. Xét ánh xạ

$$\begin{aligned} e_n^X : X^{J_n} &\rightarrow X^n \\ \gamma &\mapsto (\gamma(1_1), \gamma(1_2), \dots, \gamma(1_n)). \end{aligned}$$

1_i là điểm 1 của đoạn $[0; 1]$ thứ i trong J_n . Khi đó, e_n là phân thớ theo nghĩa Sere và thớ F đồng luân với $(\Omega X)^{n-1}$.

Định nghĩa 2. Độ phức tạp tôpô của X là số nguyên dương bé nhất $TC_n(X) = k$ thỏa mãn X^n có thể phủ bởi k tập mở $U_1, \dots, U_k$ sao cho trên mỗi U_i tồn tại một nhất cắt liên tục $s_i : U_i \rightarrow PX$ tức là $e_n^X s_i = id_{U_i}$ với mọi $i = 1, \dots, k$.

Nếu không tồn tại số k như trên thì ta nói $TC_n(X) = \infty$.

Từ định nghĩa ta có $TC_n(X) = 1$ khi và chỉ khi X co rút được (xem [2]). Trong trường hợp tổng quát thì độ phức tạp tôpô bậc cao của một không gian tôpô như một đại lượng để đo sự liên tục của một kế hoạch chuyển động bậc cao.

Một trong những tính chất quan trọng của độ phức tạp tôpô bậc cao được chúng tôi chứng minh trong định lý sau.

Định lý 1. $TC_n(X)$ là một bất biến đồng luân. Nghĩa là nếu X đồng luân với Y thì $TC_n(X) = TC_n(Y)$.

Trước khi chứng minh ta nhắc lại định nghĩa sau

Định nghĩa 3. Cho X, Y là các không gian tôpô

- i. Hai ánh xạ liên tục $f, g : X \rightarrow Y$ được gọi là đồng luân nếu tồn tại ánh xạ liên tục $H : X \times [0; 1] \rightarrow Y$, sao cho $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$ với mọi $x \in X$. Ký hiệu $f \simeq g$.

- ii. Ánh xạ liên tục $f : X \rightarrow Y$ được gọi là tương đương đồng luân nếu tồn tại ánh xạ liên tục $g : Y \rightarrow X$ sao cho $fg \simeq id_Y$ và $gf \simeq id_X$.
- iii. Hai không gian tôpô X, Y được gọi là đồng luân (hay cùng kiểu đồng luân) nếu tồn tại một tương đương đồng luân $f : X \rightarrow Y$.
- iv. Một khái niệm hay tính chất của X được gọi là tính chất bất biến đồng luân nếu nó có trên mọi không gian đồng luân với X .

Từ định nghĩa ta dễ thấy hai không gian tôpô đồng phối thì đồng luân.

Chứng minh Định lý 1. Giả sử $f : X \rightarrow Y$ và $g : Y \rightarrow X$ sao cho $fg \simeq id_Y$. Ta chứng minh $TC_n(Y) \leq TC_n(X)$.

Gọi $U \subset X^n$ là tập mở sao cho tồn tại nhất cắt $s : U \rightarrow X^n$ của e_n^X nghĩa là $e_n^X s = id_U$. Đặt

$$V = \{(A_1, \dots, A_n) \in Y^n \mid (g(A_1), \dots, g(A_n)) \in U\}.$$

Ta xây dựng $\sigma : V \rightarrow Y^n$ sao cho $e_n^Y \sigma = id_V$. Vì $fg \simeq id_Y$ nên tồn tại ánh xạ liên tục $H : Y \times [0; 1] \rightarrow Y$ sao cho $H(y, 0) = fg$, $H(y, 1) = id_Y$. Kí hiệu $h_t(y) = H(y, t)$, $t \in [0; 1]$. Vậy $h_0 = fg$, $h_1 = id_Y$.

Với bất kỳ $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in V$ ta xác định ánh xạ σ như sau:

$$\sigma(A_1, \dots, A_n)(t) = \sigma_i(t) \text{ nếu } t \in [0; 1]_i.$$

Trong đó $\sigma_i(t) : [0; 1]_i \rightarrow Y$ được xác định như sau

$$\sigma_i(t) = \begin{cases} h_{3t}(A_1), & \text{nếu } 0 \leq t < \frac{1}{3}; \\ f(\delta_i(3t-1)), & \text{nếu } \frac{1}{3} \leq t < \frac{2}{3}; \\ h_{3(1-t)}(A_i), & \text{nếu } \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ở đây $\delta_i(t)$ được xác định từ s như sau: Với

$$s(g(A_1), \dots, g(A_n)) = \gamma : J_n \rightarrow X^n$$

$$\text{Đặt } \gamma(0) = A_0, \tau_i(t) = \gamma|_{[0,1]_i}(t)$$

$$\delta_i(t) = \begin{cases} \tau_1(1-2t), & \text{nếu } 0 \leq t < \frac{1}{2}; \\ \tau_i(2t-1), & \text{nếu } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Do đó ta thấy σ được xác định hoàn toàn từ s nên nó liên tục và $e_n^Y \sigma = id_V$. Vậy $TC_n(Y) \leq TC_n(X)$.

Nếu $gf \simeq id_X$ thì đổi vai trò của X và Y và lập luận tương tự như trên ta được $TC_n(X) \leq TC_n(Y)$. Từ đó ta có điều phải chứng minh. $\square$

Corollary 1. Nếu hai không gian tôpô X và Y đồng phối thì $TC_n(X) = TC_n(Y)$.

2 Ứng dụng

Một trong những bài toán quan trọng của hình học là phân loại các đối tượng hình học hay các không gian. Tùy vào yêu cầu mà ta có thể phân loại các đối tượng này đến mức nào. Ứng dụng Định lý 1 trong tôpô là ta có thể phân lớp một số không gian tôpô (sai khác một đồng phối). Sau đây, chúng tôi đưa ra một số phân lớp các không gian tôpô bằng việc sử dụng kết quả này. Cụ thể nếu hai không gian có độ phức tạp tôpô bậc cao khác nhau thì chúng không đồng luân và do đó chúng không đồng phối. Tuy nhiên, khi hai không gian có độ phức tạp tôpô bậc cao giống nhau thì ta cũng không thể kết luận về sự đồng phối của hai không gian này. Khẳng định này được thể hiện trong ví dụ sau.

Ví dụ 1. Ta có thể chứng minh rằng với hai số nguyên dương $m \neq n$ bất kì thì $\mathbb{R}^{m+1}$ và $\mathbb{R}^{k+1}$ không đồng phối với nhau. Trong phần này, áp dụng kết quả của Định lý 1 ta sẽ chứng minh trong trường hợp $m+k$ là số lẻ.

Thật vậy, giả sử phản chứng $\mathbb{R}^{m+1}$ và $\mathbb{R}^{n+1}$ đồng phối. Suy ra, tồn tại đồng phối $f : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Lấy $x \in \mathbb{R}^{m+1}$ cố định, $y = f(x)$. Đặt $X = \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{x\}$, $Y = \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{y\}$. Từ f là đồng phối suy ra $f|_X$ cũng là đồng phối.

Do đó, X và Y đồng phối với nhau. Áp dụng Hệ quả 1 thì $TC_n(X) = TC_n(Y)$. Lại có $X \simeq \mathbb{S}^m$, $Y \simeq \mathbb{S}^k$, áp dụng Định lý 1 ta có

$$TC_n(\mathbb{S}^m) = TC_n(\mathbb{S}^k) \quad (1)$$

Theo kết quả tính toán của Rudyak trong [3] thì

$$TC_n(\mathbb{S}^p) = \begin{cases} n & \text{nếu } p \text{ lẻ} \\ n+1 & \text{nếu } p \text{ chẵn} \end{cases} \quad (2)$$

Vì $m + l$ lẻ nên trong hai số m và l có một số chẵn và một số lẻ, nghĩa là đẳng thức (1) không thể xảy ra. Do đó $\mathbb{R}^{m+1}$ và $\mathbb{R}^{l+1}$ không thể đồng phôi.

Lập luận tương tự như trên thì ta suy ra hai mặt cầu S^k và S^l với $k + l$ là số lẻ không thể đồng phôi với nhau. Và theo (2) thì hai mặt cầu có số chiều cùng chẵn hoặc số chiều cùng lẻ thì có độ phức tạp tôpô bậc cao là giống nhau. Tuy nhiên, ta có kết quả là các mặt cầu có số chiều khác nhau thì không đồng phôi. Các không gian Euclid $\mathbb{R}^m$ cũng vậy.

Tiếp theo ta sẽ chứng minh sự không đồng phôi giữa mặt cầu và các không gian Euclid.

Ví dụ 2. Xét không gian Euclid $\mathbb{R}^m$ và mặt cầu đơn vị S^m trong $\mathbb{R}^{m+1}$. Ta sẽ chứng minh $\mathbb{R}^m$ và S^m không thể đồng phôi với nhau.

Thật vậy, ta có $\mathbb{R}^m$ là tập lồi do đó $TC_n(\mathbb{R}^m) = 1$ (xem [2]). Mặt khác theo (2) thì $TC_n(S^m) > 1$. Do đó, áp dụng Hệ quả 1 ta có điều phải chứng minh.

Lập luận tương tự như trên ta suy ra $\mathbb{R}^m$ và S^k không đồng phôi với mọi m và k .

Ví dụ cuối cùng ta xét kết quả quen biết trong hình học vi phân đối với đa tạp compact một chiều.

Ví dụ 3. Chúng ta đã có kết quả: một đa tạp compact một chiều hoặc đồng phôi với đường tròn đơn vị S^1 hoặc là đoạn thẳng $I = [0; 1]$.

Ta có I là không gian tôpô co rút được nên $TC_n(I) = 1$. Mặt khác theo kết quả trong [3] ta có $TC_n(S^1) = n$. Do đó S^1 và đoạn thẳng I không đồng luân. Do đó, chúng cũng không đồng phôi. Vậy ta có thể kết luận. Đa tạp compact một chiều có hai loại: Hoặc là đồng phôi với I hoặc là đồng phôi với S^1 .

Kết luận: Độ phức tạp tôpô bậc cao của một không gian tôpô là khái niệm dùng để đo sự liên tục của một kết hoạch chuyển động bậc cao. Trong bài báo này, chúng tôi đã chỉ ra rằng độ phức tạp tôpô bậc cao là một bất biến đồng luân. Nghĩa là nó chỉ phụ thuộc vào kiểu đồng luân của không gian tôpô đó. Sử dụng kết quả này ta có thể đưa ra một số kết quả chứng minh sự không đồng phôi giữa các không gian.

Tài liệu

- [1] M.Farber, (2003) , "Topological complexity of motion planning", *Discrete Comput. Geom* 29, 211 - 221.
- [2] Tran Hue Minh, Nguyen Van Ninh (2017) , "Sự tồn tại kế hoạch chuyển động bậc cao", *Tập 172, số 12* Tập chí KH&CN Đại học Thái Nguyên.
- [3] Yuli B. Rudyak, (2010), "On higher analogs of topological complexity", *Topology and its Applications*, 157, 916-920.

THE HOMOTOPY INVARIANT PROPERTY OF HIGHER TOPOLOGICAL COMPLEXITY

Trần Huệ Minh *

Thai Nguyen University of Education
Phone number: 0912737474

Nguyễn Văn Ninh †

Thai Nguyen University of Education
Phone number: 0978692822

Summary: From the problem of planning the motion of a mechanical system in the theory of robots, Rudyak introduced the concept of higher topological complexity of a topological space. This is a concept that measures the continuity of a higher motion planning. In this article, we prove the homotopy invariant of a topological space. As an application, we prove non-homeomorphism of some spaces.

Keyword: Motion planning, topological complexity, homotopy invariant, homotopy equivalent.

*Email: tranhueminh@gmail.com

†Email: nguyenninhsp@gmail.com

