

MỘT SỐ ĐỊNH LÝ KIỂU PICARD CHO ĐƯỜNG CONG CHỈNH HÌNH TRÊN MỘT TRƯỜNG KHÔNG ARCHIMEDEAN

Lê Quang Ninh

Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm-Đại học Thái Nguyên.

Số điện thoại: 0989936789. Email: lqninh83@gmail.com.

TÓM TẮT

Định lý Picard [6] là một trong các kết quả cơ bản của giải tích phức. Định lý này đã đưa ra sự nhận giá trị của các hàm phân hình đối với các điểm trong $\mathbb{C}$. Vấn đề này đã thúc đẩy sự quan tâm của nhiều người và được mở rộng theo nhiều hướng khác nhau. Mục đích nghiên cứu của bài báo này là xét sự nhận giá trị của đường cong chỉnh hình đối với các siêu mặt Fermat-Waring trong một trường không Archimedean.

Từ khóa: *Định lý Picard, Đường cong chỉnh hình, Trường không Archimedean, p -adic, Hyperbolic*

Chỉ số phân loại (Mathematics Subject Classification): 14S05; 30D35.

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ phát triển khoa học và công nghệ quốc gia (NAFOSTED) trong đề tài mã số 101.01-2012.19.

1 Mở đầu

Một trong những kết quả cơ bản của giải tích phức, Định lý Picard, nói rằng hàm phân hình khác hằng số nhận mọi giá trị thuộc $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, trừ ra cùng lắm hai giá trị. Trong thuật ngữ của không gian hyperbolic phức, điều đó có nghĩa là mặt phẳng xạ ảnh trừ đi 3 điểm là không gian hyperbolic Brody.

Trong những năm gần đây, Định lý Picard [6] đã được mở rộng theo nhiều hướng khác nhau. Các định lý về tính suy biến của các đường cong chỉnh hình sẽ được gọi là các định lý kiểu Picard. Một hướng phát triển của các định lý kiểu Picard là tìm các không

gian phức mà trong đó mọi đường cong chỉnh hình đều suy biến. Trong hướng này, có thể kể đến các kết quả của Nadel [8], Hà Huy Khoái [2], [3], [4], Masuda và Noguchi [7]....

Trong trường hợp p -adic, các không gian hyperbolic được định nghĩa và nghiên cứu trong các công trình của Hà Huy Khoái [5] và Cherry [1]. Sau khi xây dựng lý thuyết Nevanlinna-Cartan p -adic, Hà Huy Khoái và Mai Văn Tư [5] đã áp dụng lý thuyết đó vào việc nghiên cứu tính suy biến của các đường cong chỉnh hình p -adic và đã đưa ra những ví dụ về các lớp không gian hyperbolic cụ thể.

Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra các

Định lý kiểu Picard cho đường cong chính hình trên một trường không Archimedean.

2 Một số khái niệm và kết quả chuẩn bị

Ký hiệu $\mathbb{K}$ là một trường đóng đại số với đặc số không, đầy đủ với giá trị tuyệt đối không-Archimedean, không tầm thường, được ký hiệu là $|\cdot|$.

Cho f là hàm nguyên khác hằng trên $\mathbb{K}$. Với mỗi $b \in \mathbb{K}$, f có thể viết dưới dạng

$$f = \sum_{n=q}^{\infty} b_n(z-b)^n,$$

với $b_q \neq 0$ và đặt $\omega_f^0(b) = q$.

Với mỗi $a \in \mathbb{K}$, hàm $\omega_f^a : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{N}$ được xác định bởi $\omega_f^a(b) = \omega_{f-a}^0(b)$.

Cho số thực $\rho_0: 0 < \rho_0 \leq r$, $a \in \mathbb{K}$, ta định nghĩa hàm đếm các không điểm của $f-a$ tính cả bội trên đĩa $D_r = \{z \in \mathbb{K} : |z| \leq r\}$ là

$$N_f(a, r) = \frac{1}{\ln \rho} \int_{\rho_0}^r \frac{n_f(a, x)}{x} dx,$$

với $n_f(a, x)$ là số nghiệm của phương trình $f(z) = a$ (tính cả bội) trên đĩa $D_r = \{z \in \mathbb{K} : |z| \leq x\}$. Nếu $a = 0$, thì đặt $N_f(r) = N_f(0, r)$.

Cho số nguyên dương k , đặt $N_{k,f}(a, r) = \frac{1}{\ln \rho} \int_{\rho_0}^r \frac{n_{k,f}(a, x)}{x} dx$, với $n_{k,f}(a, r) = \sum_{|z| \leq r} \min \{ \omega_f^a(z), k \}$.

Cho f là một hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{K}$. Với mỗi $a \in \mathbb{K}$, hàm $\mu_f^a : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{N}$ được xác định bởi

$$\mu_f^a(z) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } f(z) \neq a \\ d & \text{nếu } f(z) = a \text{ với bội } d. \end{cases}$$

Một ánh xạ chính hình không-Archimedean f là một ánh xạ $f = [f_1, \dots, f_{N+1}] : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{K})$, với $f_1, \dots, f_{N+1}$ là các hàm nguyên không có không điểm chung trên $\mathbb{K}$. Ánh xạ $\tilde{f} = (f_1, \dots, f_{N+1}) : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}^{N+1} - \{0\}$ được gọi là biểu diễn rút gọn của f .

Cho H là một siêu phẳng của $\mathbb{P}^N(\mathbb{K})$ sao cho ảnh của f không chứa trong H và H được xác định bởi phương trình $F = 0$. Với mỗi $z \in \mathbb{K}$ đặt

$$\mu_f(H, z) = \mu_{F \circ \tilde{f}}(z), \quad \mu_f(H) = \mu_{F \circ \tilde{f}}.$$

Cho f là một đường cong chính hình từ $\mathbb{K}$ đến $\mathbb{P}^N(\mathbb{K})$ với biểu diễn rút gọn $\tilde{f} = (f_1, \dots, f_{N+1})$. Hàm đặc trưng của f là

$$T_f(r) = \log \|f\|_r, \quad \text{với } \|f\|_r = \max_{1 \leq i \leq N+1} |f_i|_r,$$

trong đó $|f_i|_r$ là maximum của $|f_i(z)|$ với $i = 1, \dots, N+1$, $|z| \leq r$.

Đặt

$$N_f(H, r) = N \left(r, \frac{1}{F(\tilde{f})} \right),$$

$$N_{k,f}(H, r) = N_k \left(r, \frac{1}{F(\tilde{f})} \right).$$

Cho q, N là các số nguyên dương với $q \geq N+1$. Các siêu phẳng $H_1, \dots, H_q$ của $\mathbb{P}^N(\mathbb{K})$ được gọi là ở vị trí tổng quát nếu $\bigcap_{i=1}^{N+1} H_{j_i} = \emptyset$ với mọi $\{j_1, \dots, j_{N+1}\} \subset \{1, \dots, q\}$.

Bổ đề 2.1. [5] Cho f là các đường cong chính hình không suy biến tuyến tính từ $\mathbb{K}$ đến $\mathbb{P}^N(\mathbb{K})$ và $H_1, \dots, H_q$ là các siêu phẳng của $\mathbb{P}^N(\mathbb{K})$ ở vị trí tổng quát. Khi đó $(q - N - 1)T_f(r) \leq \sum_{i=1}^q N_{N,f}(H_i, r)$

$$- \frac{N(N+1)}{2} \log r + O(1).$$

Bổ đề 2.2. [9] Cho $d, N \in \mathbb{N}^*, q_i \in \mathbb{N}$ và $z_i^{d-q_i} D_i(z_1, z_2, \dots, z_{N+1})$ là một họ đa thức thuần nhất bậc d ở vị trí tổng quát với hệ số trong $\mathbb{K}$ thỏa mãn $f_i^{d-q_i} D_i(f_1, \dots, f_{N+1}) \neq 0, 1 \leq i \leq N+1$. Giả sử

$$\sum_{i=1}^{N+1} f_i^{d-q_i} D_i(f_1, \dots, f_{N+1}) = 0,$$

$$d \geq N^2 - 1 + \sum_{i=1}^{N+1} q_i, N > 1.$$

Khi đó $f_1^{d-q_1} D_1(f_1, \dots, f_{N+1}), \dots, f_N^{d-q_N} D_N(f_1, \dots, f_{N+1})$ là phụ thuộc tuyến tính trên $\mathbb{K}$.

3 Các kết quả chính

Định lý 3.1. Giả sử X là siêu mặt bậc d trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ được xác định bởi phương trình:

$$c_1 H_1^d + \dots + c_s H_s^d = 0;$$

với $2 \leq s \leq n+1, d \geq s(s-2)$, ở đó $H_1, H_2, \dots, H_s$ là các dạng tuyến tính phân biệt trên $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ và độc lập tuyến tính trên $\mathbb{K}$. Giả sử $f: \mathbb{K} \rightarrow X$ là đường cong chỉnh hình sao cho $H_i \circ f \neq 0, (i = 1, \dots, s)$. Khi đó không gian con V của $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ sinh bởi ảnh của f thỏa mãn

$$\dim V \leq n + \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil - s,$$

với $\left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil$ là phần nguyên của $\frac{s}{2}$.

Chứng minh. Từ giả thiết, ta có

$$c_1 H_1^d \circ f + \dots + c_s H_s^d \circ f \equiv 0$$

Đặt $g_i = H_i^d \circ f, i = 1, \dots, s$. Từ hệ thức trên ta được

$$c_1 g_1 + \dots + c_s g_s \equiv 0 \quad (1)$$

Trên tập hợp các chỉ số $\{1, 2, \dots, s\}$ ta định nghĩa quan hệ tương đương như sau: $i \sim j$ khi và chỉ khi tồn tại hằng số $c_{ij} \in \mathbb{K}^*$ sao cho $g_i = c_{ij} g_j$. Ta sẽ chứng minh rằng mỗi lớp tương đương I_v chứa ít nhất hai phần tử và

$$\sum_{i \in I_v} c_i g_i = 0 \quad (2)$$

Ta chứng minh bằng qui nạp theo số tự nhiên s trong hệ thức (1). Với $s = 2$ thì (1) là tầm thường.

Giả sử đúng với mọi số tự nhiên $l \leq s-1$, ta sẽ chứng minh (2) đúng với s .

Từ giả thiết $d \geq s(s-2)$, ta nhận được một tập con gồm $s-1$ hàm của tập hợp $\{g_1, \dots, g_s\}$ là phụ thuộc tuyến tính.

Bây giờ gọi I_v là một lớp tương đương bất kỳ được xác định từ quan hệ tương đương $\sim$ đã được định nghĩa ở trên.

Ta sẽ chứng minh $2 \leq \#I_v$. Thật vậy, xét một phần tử của I_v . Không giảm tổng quát, giả sử rằng $1 \in I_v$. Do $\{g_1, \dots, g_s\}$ phụ thuộc tuyến tính nên tồn tại hệ thức

$$b_1 g_1 + \dots + b_{s-1} g_{s-1} \equiv 0 \quad (3)$$

ở đó $b_1, \dots, b_{s-1}$ không đồng thời bằng 0.

Nếu $b_1 \neq 0$ thì theo giả thiết qui nạp ta có $\#I_v \geq 2$.

Nếu $b_1 = 0$ thì hệ thức (3) tồn tại $b_i \neq 0$. Không xét đến các hệ số $b_i = 0$ ở trong (3), sau đó áp dụng giả thiết qui nạp ta luôn tìm được $j, (2 \leq j \leq s-1, j \neq i)$ sao cho $g_i = c_{ij} g_j$, ở đó c_{ij} là hằng số. Khi đó

$$c_i g_i + c_j g_j = (c_i c_{ij} + c_j) g_j.$$

Từ đây suy ra hệ thức (1) chỉ còn không quá $s-1$ hàm. Khi đó ta áp dụng giả thiết qui nạp và nhận được $\#I_v \geq 2$. Do đó $\#I_v \neq s-1$. Vậy $2 \leq \#I_v$ hoặc $\#I_v = s$.

Bây giờ ta chứng minh

$$\sum_{i \in I_v} c_i g_i \equiv 0 \quad (4)$$

Nếu $\#I_v = s$ thì ta có ngay hệ thức (4).

Xét $2 \leq \#I_v \leq s - 2$. Khi đó ta có

$$b_{i_1} g_{i_1} + \cdots + b_{i_l} g_{i_l} \equiv 0 \quad (5)$$

ở đó $b_{ij} \in \mathbb{K}^*$.

Áp dụng giả thiết qui nạp cho hệ thức (5) ta luôn tìm được i, j với $1 \leq i < j \leq s$ sao cho $g_i = c_{ij} g_j$. Từ đây suy ra

$$c_i g_i + c_j g_j = (c_i c_{ij} + c_j) g_j. \quad (6)$$

Đặt $c'_j = c_i c_{ij} + c_j$. Áp dụng hệ thức (6) vào hệ thức (1) ta nhận được

$$\begin{aligned} c_1 g_1 + \cdots + c_{i-1} g_{i-1} + c_{i+1} g_{i+1} + \cdots \\ + c_{j-1} g_{j-1} + c_{j+1} g_{j+1} + \cdots + c'_j g_j \equiv 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Xét $c'_j \neq 0$ và $i \notin I_v$ và I_v là một lớp tương đương trên tập hợp

$$M = \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, s\}.$$

Áp dụng giả thiết qui nạp vào hệ thức (7) ta nhận được

$$\sum_{i \in I_v} c_i g_i \equiv 0.$$

Xét $c'_j \neq 0$ và $i \in I_v$. Khi đó $j \in I_v$ và $I'_v = I_v - \{i\}$ là một lớp tương đương được xác định từ quan hệ $\sim$ trên M . Ta có $j \in I'_v$. Đặt $I''_v = I'_v - \{j\}$. Do $\#I'_v \geq 2$ nên $I''_v \neq \emptyset$.

Mặt khác theo giả thiết qui nạp ta có

$$\sum_{i \in I''_v} c_i g_i + c'_j g_j \equiv 0.$$

Do đó

$$\sum_{i \in I_v} c_i g_i \equiv 0.$$

Xét $c'_j = 0$. Đặt $J_v = I_v - \{i, j\}$. Khi đó hệ thức (7) là

$$\begin{aligned} c_1 g_1 + \cdots + c_{i-1} g_{i-1} + c_{i+1} g_{i+1} + \cdots \\ + c_{j-1} g_{j-1} + c_{j+1} g_{j+1} + \cdots + c_s g_s \equiv 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Nếu $J_v = \emptyset$ thì $I_v = \{i, j\}$. Do đó

$$\sum_{i \in I_v} c_i g_i = c'_j g_j \equiv 0.$$

Nếu $J_v \neq \emptyset$ thì J_v là một lớp tương đương được xác định từ quan hệ $\sim$ trên

$$\{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, j-1, j+1, \dots, s\}.$$

Áp dụng giả thiết qui nạp vào hệ thức (8) ta nhận được

$$\sum_{i \in J_v} c_i g_i \equiv 0.$$

Do đó

$$\sum_{i \in I_v} c_i g_i = \sum_{i \in J_v} c_i g_i + c'_j g_j \equiv 0.$$

Như vậy có một phân hoạch của $\{1, 2, \dots, s\} = \bigcup_v I_v$ sao cho,

i) Mỗi I_v chứa ít nhất hai phần tử

ii) Với mọi $i, j \in I_v$, ta có

$$H_i^d \circ f - c_{ij} H_j^d \circ f \equiv 0,$$

ở đó $c_{ij} \in \mathbb{K}^*$.

Từ

$$H_i^d \circ f - c_{ij} H_j^d \circ f \equiv 0,$$

ta sẽ chứng minh ảnh của f nằm trong siêu phẳng H_{ij} được xác định bởi phương trình

$$H_i - d_{ij} = 0, d_{ij} \in \mathbb{K}^*.$$

Thật vậy, chúng ta có thể giả sử $H_i \circ f$ và $H_j \circ f$ không có không điểm chung. Nếu $H_i \circ f$ khác hằng số thì tồn tại $z \in \mathbb{K}^*$ sao cho $H_i \circ f(z) = 0$ và $H_j \circ f(z) \neq 0$. Do đó

$$H_i^d \circ f(z) - c_{ij} H_j^d \circ f(z).$$

Mâu thuẫn với ii). Suy ra $H_i \circ f$ là hàm hằng. Chứng minh tương tự $H_i \circ f$ cũng là hàm hằng. Vì vậy tồn tại $d_{ij} \in \mathbb{K}^*$ để cho

$$H_i \circ f(z) - d_{ij} H_j \circ f(z) = 0, \text{ với mọi } z \in \mathbb{K}.$$

Vậy ảnh của f nằm trong siêu phẳng H_{ij} được xác định bởi phương trình

$$H_i - d_{ij} H_j = 0, d_{ij} \in \mathbb{K}^*.$$

Giả sử có q lớp tương đương được xác định từ quan hệ tương đương $\sim$ và s_v là số phần tử của lớp tương đương I_v .

Với mỗi I_v , lấy một chỉ số $i \in I_v$. Với $j \in I_v$ và $i \neq j$ ta có

$$H_i - a_{ij} H_j = 0 \quad (9)$$

là phương trình siêu phẳng chứa H_{ij} chứa ảnh của f . Khi đó chúng ta có ít nhất là

$$(s_1 - 1) + \dots + (s_q - 1) = (s_1 + \dots + s_q) - q = s - q$$

phương trình trong hệ (9) độc lập với nhau.

Do mỗi I_v có ít nhất hai phần tử nên $q \leq \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$. Từ đây suy ra

$$s - q \leq s - \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$$

Gọi V là không gian xạ ảnh con của $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ được xác định bởi các phương trình $H_{ij} = 0$ đã nói ở trên. Ta có $\dim V \leq N - (s - \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor)$. Mặt khác, do H_{ij} chứa ảnh của f nên V chứa ảnh của f . Định lí được chứng minh. $\square$

Định lý 3.2. Giả sử X là siêu mặt bậc d trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ được xác định bởi phương trình:

$$c_1 H_1^d + \dots + c_s H_s^d = 0, \quad 2 \leq s \leq n + 1 \text{ và } d \geq s^2 - 1,$$

ở đó $H_1, \dots, H_s$ là các dạng tuyến tính phân biệt trên $\mathbb{K}^{n+1}$ và độc lập tuyến tính trên $\mathbb{K}$. Giả sử $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) - X$ là đường cong chính hình sao cho $H_i \circ f \neq 0$, ($i = 1, 2, \dots, s$). Khi đó không gian con V của $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ sinh bởi ảnh của f thỏa mãn

$$\dim V \leq N + \left\lfloor \frac{s+1}{2} \right\rfloor - s - 1,$$

ở đó $\left\lfloor \frac{s+1}{2} \right\rfloor$ là phần nguyên của $\frac{s+1}{2}$.

Chứng minh. Giả sử $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) - X$ là một đường cong chính hình. Do $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) - X$ nên $c_1 H_1^d \circ f + \dots + c_s H_s^d \circ f = h$ là hàm nguyên không có không điểm. Do đó

$$c_1 H_1^d \circ f + \dots + c_s H_s^d \circ f - h \equiv 0.$$

Bây giờ phép chứng minh được tiến hành tương tự như trong chứng minh của Định lí 3.1 ta có điều phải chứng minh. $\square$

KẾT LUẬN

Bài báo nghiên cứu sự nhận giá trị của đường cong chính hình đối với các siêu mặt trong một trường không Archimedean. Trong bài báo này, từ việc nhắc lại một số khái niệm và kết quả về đường cong chính hình trên một trường không Archimedean, bài báo đưa ra hai Định lý kiểu Picard cho đường cong chính hình trên một trường không Archimedean.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. W. Cherry (1993), *Hyperbolic p-adic analytic spaces*, Ph. D. Thesis, Yale University.
2. Ha Huy Khoai (1997), "Hyperbolic surfaces in $\mathbb{P}^3$ ", *Proc. AMS*, Vol. 125, No.2, pp. 3527-3532.
3. Ha Huy Khoai (1997), "p-adic hyperbolic surfaces", *Acta Math. Vietnam*, Vol.22, No.2, pp. 501-514.
4. Ha Huy Khoai (1997), "Borel's curves in projective hypersurfaces", *Publication of CFCA, Vietnam National Iniversity Publishing House*, Vol.1, pp.79-86.
5. Ha Huy Khoai and Mai Van Tu(1995), "p-adic Nevanlinna-Cartan Theorem", *Internat. J. Math.* Vol.6, pp.719-731.
6. S. Lang (1987), *Introduction to complex hyperbolic spaces*, Springer - Verlag - New York - Berlin - Heidelberg.
7. K. Masuda and J. Noguchi (1996), "A construction of hyperbolic hypersurfaces of $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ", *Math. Ann*, Vol.304, No.2, pp. 339-362.
8. A. Nadel (1987), "Hyperbolic Surfaces in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ ", *Duke Math. J.*, Vol. 58, pp. 749-771.
9. Nguyen Thanh Quang and Phan Duc Tuan (2004), "Siu-Yeung's Lemma in the p-adic case", *Vietnam Journal of Mathematics*, Vol.32, No.2, pp.227-234.

Summary

Some Picard type theorems for holomorphic curves over a non-Archimedean field

Le Quang Ninh

Department of Mathematics, Thai Nguyen University of Education.

Phone: 0989936789. Email: lqninh83@gmail.com.

Abstract

Picard Theorem [6] is one of fundamental results of complex analysis. This theorem gives the value distributions of meromorphic functions for points in $\mathbb{C}$. This problem caused intensive attentions of many people, and has been generalized in various directions. The research purpose of this paper is to consider the value distribution of holomorphic curves for Fermat-Waring hypersurfaces in non-Archimedean field.

Keyword: *Picard theorem, Holomorphic curves, Non-Archimedean field, p-adic, Hyperbolic.*

Ngày nhận bài: 02/5/2018; **Ngày phản biện:** 28/5/2018; **Ngày duyệt đăng:** 31/5/2018