

VẤN ĐỀ NHẬN GIÁ TRỊ VÀ DUY NHẤT CỦA TOÁN TỬ SAI PHÂN VÀ TÍCH SAI PHÂN ĐỐI VỚI HÀM PHÂN HÌNH TRÊN MỘT TRƯỜNG KHÔNG ARCHIMEDEAN

Nguyễn Xuân Lai

Trường Cao đẳng Hải Dương.

Số điện thoại: 0983524909. Email: laicdhd@gmail.com.

TÓM TẮT

Cho $\mathbb{K}$ là một trường đóng đại số có đặc số không, đầy đủ với chuẩn không Archimedean. Trong [9], Ojeda đã chứng minh rằng với mỗi hàm phân hình siêu việt f trên $\mathbb{K}$, $f'f^n - 1$ có hữu hạn không điểm nếu $n \geq 3$. Trong trường hợp $n = 2$, các kết quả tương tự được thiết lập bởi Escassut và Ojeda [1] vào năm 2014. Trong [4], đã có một số kết quả tương tự cho trường hợp đa thức vi phân, sai phân và các đạo hàm cấp n của hàm phân hình p -adic. Năm 2012, Boussaf đã nghiên cứu vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình p -adic $f'P'(f)$, $g'P'(g)$ nhận chung các hàm nhỏ. Trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu vấn đề nhận giá trị và duy nhất của toán tử sai phân và tích sai phân đối với hàm phân hình trên trường số p -adic.

Từ khóa: *Giả thuyết Hayman, Hàm phân hình, Toán tử sai phân, Tích sai phân, Trường số p -adic.*

Chỉ số phân loại (Mathematics Subject Classification): 14S05; 30D35.

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ phát triển khoa học và công nghệ quốc gia (NAFOSTED) trong đề tài mã số 101.01-2012.19.

1 Mở đầu

Phân bố giá trị và vấn đề xác định duy nhất đã được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước xét trong mối liên hệ với đạo hàm của hàm phân hình và ảnh ngược của các điểm riêng rẽ. Người khởi xướng hướng nghiên cứu này là Hayman. Năm 1967, Hayman đã chứng minh kết quả sau đây:

Định lý A. [4] *Cho f là hàm phân hình trên $\mathbb{C}$. Nếu $f(z) \neq 0$ và $f^{(k)}(z) \neq 1$ với k là*

một số nguyên dương nào đó và với mọi $z \in \mathbb{C}$ thì f là hằng.

Năm 1967, Hayman cũng đưa ra giả thuyết sau đây:

Giả thuyết Hayman. [4] *Nếu một hàm nguyên f thỏa mãn $f^n(z)f'(z) \neq 1$ với n là một số nguyên dương nào đó và với mọi $z \in \mathbb{C}$ thì f là hằng.*

Giả thuyết Hayman đã được Hayman kiểm tra đối với hàm nguyên siêu việt và $n > 1$,

đã được Clunie kiểm tra đối với $n \geq 1$ vào năm 1967. Các kết quả này và các vấn đề liên quan đã hình thành nhánh nghiên cứu được gọi là sự lựa chọn của Hayman.

Tiếp đó, đối với các hàm nguyên f và g , C. C. Yang và G. G. Gundersen đã nghiên cứu trường hợp ở đó $f^{(k)}$ và $g^{(k)}$ nhận giá trị 0 CM, $k = 0, 1$.

Một trong những công trình đầu tiên thúc đẩy hướng nghiên cứu này thuộc về C.C.Yang – X.H. Hua. Năm 1997, hai ông đã chứng minh định lý sau đây:

Định lý B. [10] *Cho f và g là hai hàm phân hình khác hằng, $n \geq 11$ là một số nguyên và $a \in \mathbb{C} - \{0\}$. Nếu $f^n f'$ và $g^n g'$ nhận giá trị a CM thì hoặc $f = dg$ với $d^{n+1} = 1$ hoặc $f(z) = c_1 e^{cz}$ và $g(z) = c_2 e^{-cz}$, ở đó c, c_1, c_2 là các hằng số và thỏa mãn $(c_1 c_2)^{n+1} c^2 = -a^2$.*

Từ đó, hướng nghiên cứu trên phát triển mạnh mẽ với những kết quả sâu sắc của I. Lahiri, Q. Han – H. X. Yi, W. Bergweiler, J. K. Langley, K. Liu, L. Z. Yang, L. C. Hong, M. L. Fang, B. Q. Li, P. C. Hu – C.C.Yang, A. Eremenko, G. Frank – X. Hua – R. Vailancourt Công cụ sử dụng ở đó là một số kiểu định lý chính thứ hai cho đa thức vi phân cùng với các ước lượng giữa hàm đặc trưng, hàm đếm của hàm và đạo hàm.

Trong trường hợp p -adic, kết quả đầu tiên theo hướng nghiên cứu này thuộc về J. Ojeda. Năm 2008, J. Ojeda [9] đã xét vấn đề nhận giá trị của $f' + T f^n$ với T là hàm hữu tỷ.

Trong những năm gần đây, vấn đề trên được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước xét trong mối liên hệ với đa thức sai phân của hàm phân hình và ảnh ngược của các điểm riêng rẽ. Năm 2006, Halburd và Korhonen [2] đã thiết lập tương tự của lý thuyết Nevanlinna cho toán tử sai phân của hàm phân hình có bậc hữu hạn. Năm 2007, I.Laine và C.C.Yang [8] đã thiết lập tương tự Định lý A của Hayman cho một kiểu đa

thức sai phân đặc biệt của hàm nguyên siêu việt có bậc hữu hạn.

Năm 2009, K. Liu và L.Z.Yang [7] đã chứng minh kết quả tương tự kết quả của I.Laine và C.C.Yang năm 2007 cho toán tử sai phân của hàm nguyên siêu việt có bậc hữu hạn, đã tương tự Định lý B (xem [10]) cho một kiểu đa thức sai phân đặc biệt của hàm phân hình.

Gần đây, Hà Huy Khoái và Vũ Hoài An [3-4], Hà Huy Khoái, Vũ Hoài An và Nguyễn Xuân Lai [6] đã xét phân bố giá trị và vấn đề duy nhất đối với đạo hàm bậc cao của hàm phân hình trên một trường không Archimedean. Họ đã tương tự được kết quả của Yang-Hua (Định lý B) cho $(f^n)^{(k)}$ với f là hàm phân hình trên một trường không Archimedean.

Trong bài báo này, chúng tôi xét vấn đề nhận giá trị và duy nhất đối với toán tử sai phân và tích sai phân của hàm phân hình trên một trường không Archimedean.

2 Vấn đề nhận giá trị

Trong bài báo ta luôn giả thiết $\mathbb{K}$ là một trường đặc số không, đầy đủ với chuẩn không Archimedean và đóng đại số.

Trước tiên ta phát biểu Giả thuyết Hayman cho toán tử sai phân trên một trường không Archimedean (p -adic).

Giả thuyết Hayman cho Toán tử sai phân p -adic. *Nếu một hàm phân hình p -adic f thỏa mãn $f^n(z) \Delta_c f(z) \neq 1$ với n là một số nguyên dương nào đó và với mọi $z \in \mathbb{K}$ thì f là hằng.*

Ta cần các bổ đề sau:

Bổ đề 2.1. [5] *Nếu hàm phân hình f trên $\mathbb{K}$ thỏa mãn $\Delta_c f(z) = 0$ với mọi $z \in \mathbb{K}$ thì f là hằng.*

Định lý 2.2. *Nếu hàm phân hình f trên $\mathbb{K}$ thỏa mãn $f^n(z) \Delta_c f(z) \neq 1$ với $n \geq 6$*

là một số nguyên dương nào đó và với mọi $z \in \mathbb{K}$ thì f là hằng.

Chứng minh. Giả sử ngược lại, f khác hằng. Theo Bổ đề 2.1 ta có $\Delta_c f$ không đồng nhất không.

Đặt $G = f^n(z) \Delta_c f$. Ta thấy rằng, mọi cực điểm của G chỉ có thể xảy ra tại các cực điểm của $f, f(z+c)$, và mọi không điểm của G chỉ có thể xảy ra tại các không điểm của $f, \Delta_c f$. Áp dụng Định lý chính thứ nhất, thứ hai và kết hợp với Bổ đề 3.1, 3.2 [5] ta có

$$\begin{aligned} (n-1)T(r, f) &\leq T(r, f^n(z) \Delta_c f) + O(1) \\ &\leq N_1(r, G) + N_1(r, \frac{1}{G}) \\ &\quad + N_{1,G}(r, \frac{1}{G-1}) \\ &\quad - \log r + O(1) \\ &\leq T(r, f) + T(r, f) \\ &\quad + T(r, f) + 2T(r, f) \\ &\quad + N_1(r, \frac{1}{G-1}) \\ &\quad - \log r + O(1). \end{aligned}$$

Do đó

$$(n-6)T(r, f) + \log r \leq N_1(r, \frac{1}{G-1}) + O(1).$$

Từ f khác hằng và $n \geq 6$ ta có G nhận giá trị 1, một mâu thuẫn. Vậy f là hằng.

Định lý 2.2 góp phần khẳng định Giả thuyết Hayman p -adic.

Câu hỏi: Với $n = 1, \dots, 5$ thì Định lý 2.2 còn đúng nữa hay không?

Sau đây ta nghiên cứu Giả thuyết Hayman đối với tích sai phân của hàm phân hình trên một trường không Archimedean.

Giả thuyết Hayman được phát biểu cho Tích sai phân của hàm phân hình p -adic

như sau:

Giả thuyết Hayman cho Tích sai phân p -adic. Nếu f là một hàm phân hình trên $\mathbb{K}$ thỏa mãn $f^n(z) f(z+c) \neq 1$ với n là một số nguyên dương nào đó, $c \neq 0$ và với mọi $z \in \mathbb{K}$ thì f là hằng.

Định lý sau đây trả lời chưa trọn vẹn Giả thuyết Hayman cho tích sai phân p -adic.

Định lý 2.3. Nếu một hàm phân hình f trên $\mathbb{K}$ thỏa mãn $f^n(z) f(z+c) \neq 1$ với $n \geq 5$ là một số nguyên dương nào đó và với mọi $z \in \mathbb{K}$ thì f là hằng.

Chứng minh. Giả sử ngược lại, f khác hằng. Theo Bổ đề 2.1 ta có $f(z+c)$ khác hằng. Đặt $F = f^n(z) f(z+c)$. Ta thấy rằng, mọi cực điểm của F chỉ có thể xảy ra tại các cực điểm của $f, f(z+c)$, và mọi không điểm của F chỉ có thể xảy ra tại $f, f(z+c)$. Áp dụng Định lý chính thứ hai, thứ nhất và kết hợp với Bổ đề 3.1, 3.2 [5] ta có

$$\begin{aligned} (n-1)T(r, f) &\leq T(r, f^n(z) f(z+c)) + O(1) \\ &\leq N_1(r, F) + N_1(r, \frac{1}{F}) \\ &\quad + N_{1,F}(r, \frac{1}{F-1}) \\ &\quad - \log r + O(1) \\ &\leq T(r, f) + T(r, f) + T(r, f) \\ &\quad + T(r, f) + N_1(r, \frac{1}{F-1}) \\ &\quad - \log r + O(1). \end{aligned}$$

Do đó

$$(n-5)T(r, f) + \log r \leq N_1(r, \frac{1}{F-1}) + O(1).$$

Từ f khác hằng và $n \geq 5$ ta có F nhận giá trị 1, một mâu thuẫn.

Vậy f là hằng.

Câu hỏi đặt ra là: Với $n = 1, \dots, 4$ thì Định lý 2.3. còn đúng nữa hay không?

3 Vấn đề duy nhất

Trong phần này ta nghiên cứu vấn đề tương tự với Định lý B cho tích sai phân của hàm phân hình p -adic trên $\mathbb{K}$.

Định lý 3.1.

Giả sử f, g là các hàm phân hình trên $\mathbb{K}$. Nếu $E_{f^n f(z+c)}(1) = E_{g^n g(z+c)}(1)$ và $n \geq 13, n$ là số nguyên, thì $f = hg$ với $h^{n+1} = 1$ hoặc $fg = l$ với $l^{n+1} = 1$.

Chứng minh. Áp dụng Bổ đề 3.3 [5] với các trường hợp sau:

Trường hợp 1. Đặt $A = f^n f(z+c), B = g^n g(z+c)$.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} T(r, A) + O(1) &\leq N_1(r, A) + N_1^{\geq 2}(r, A) \\ &\quad + N_1(r, \frac{1}{A}) + N_{1,A}^{\geq 2}(r, \frac{1}{A}) \\ &\quad + N_1(r, B) + N_1^{\geq 2}(r, B) \\ &\quad + N_1(r, \frac{1}{B}) + N_1^{\geq 2}(r, \frac{1}{B}) \\ &\quad - \log r + O(1). \end{aligned}$$

Kết hợp với Bổ đề 3.2 [5] ta có

$$\begin{aligned} (n-1)T(r, f) &\leq T(r, A) + O(1) \\ &\leq N_1(r, A) + N_1^{\geq 2}(r, A) \\ &\quad + N_1(r, \frac{1}{A}) + N_{1,A}^{\geq 2}(r, \frac{1}{A}) \\ &\quad + N_1(r, B) + N_1^{\geq 2}(r, B) \\ &\quad + N_1(r, \frac{1}{B}) + N_1^{\geq 2}(r, \frac{1}{B}) \\ &\quad - \log r + O(1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (n-1)T(r, g) &\leq T(r, B) + O(1) \\ &\leq N_1(r, A) + N_1^{\geq 2}(r, A) \\ &\quad + N_1(r, \frac{1}{A}) + N_{1,A}^{\geq 2}(r, \frac{1}{A}) \\ &\quad + N_1(r, B) + N_1^{\geq 2}(r, B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ N_1(r, \frac{1}{B}) + N_1^{\geq 2}(r, \frac{1}{B}) \\ &- \log r + O(1). \end{aligned} \quad (1)$$

Mọi cực điểm của A chỉ có thể xảy ra tại các cực điểm của $f, f(z+c)$. Kết hợp với Định lý chính thứ nhất và Bổ đề 3.1 [5] ta có

$$\begin{aligned} &N_1(r, A) + N_1^{\geq 2}(r, A) \\ &\leq 2N_1(r, f) + (N_1(r, f(z+c)) + N_1^{\geq 2}(r, f(z+c))) + O(1) \\ &\leq 2N(r, f) + N(r, f(z+c)) + O(1) \\ &\leq 2T(r, f) + T(r, f(z+c)) + O(1) \\ &\leq 3T(r, f) + O(1). \end{aligned}$$

Suy ra

$$N_1(r, A) + N_1^{\geq 2}(r, A) \leq 3T(r, f) + O(1). \quad (2)$$

Ta thấy rằng, mọi không điểm của A chỉ có thể xảy ra tại các không điểm của $f, f(z+c)$.

Tương tự (2) ta nhận được

$$N_1(r, \frac{1}{A}) + N_{1,A}^{\geq 2}(r, \frac{1}{A}) \leq 3T(r, f) + O(1). \quad (3)$$

Tương tự đối với B ta cũng có:

$$\begin{aligned} &N_{1,B}(\infty, r) + N_{1,B}^{\geq 2}(\infty, r) \leq (k+2)T(r, g) \\ &\quad + O(1). \\ &N_{1,B}(0, r) + N_{1,B}^{\geq 2}(0, r) \leq (k+2)T(r, g) \\ &\quad + O(1). \end{aligned} \quad (4)$$

Kết hợp (1)-(4) ta có

$$\begin{aligned} (n-1)T(r, f) &\leq 6(T(r, f) + T(r, g)) \\ &\quad - \log r + O(1). \end{aligned}$$

Tương tự

$$\begin{aligned} (n-1)T(r, g) &\leq 6(T(r, f) + T(r, g)) \\ &\quad - \log r + O(1). \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} (n-1)(T_f(r) + T_g(r)) &\leq 12(T(r, f) + T(r, g)) \\ &\quad - 2\log r + O(1), \end{aligned}$$

$$(n-13)(T_f(r) + T_g(r)) + 2 \log r \leq O(1).$$

Do $n \geq 13$ nên ta gặp mâu thuẫn.

Trường hợp 2. $f^n f(z+c)g^n g(z+c) \equiv 1$.
Khi đó ta có

$$(fg)^n(f(z+c)g(z+c)) = 1$$

Đặt $l = fg$ và giả sử l không phải hàm hằng. Khi đó ta có

$$l^n(z) = \frac{1}{l(z+c)}.$$

Theo Bổ đề 3.1 [5] ta có

$$nT(r, l) = T(r, l^n) = T(r, \frac{1}{l(z+c)})$$

$$\leq T(r, l(z+c)) + O(1)$$

$$\leq T(r, l) + O(1).$$

Điều này mâu thuẫn với $n \geq 13$. Vì vậy l phải là hàm hằng. Do đó $fg = l$ với $l^{n+1} = 1$.

Trường hợp 3. $A = f^n f(z+c) \equiv B = g^n g(z+c)$. Đặt $h = \frac{f}{g}$. Giả sử h không phải hàm hằng. Khi đó ta có

$$h^n(z) = \frac{1}{h(z+c)}.$$

Theo Bổ đề 3.1 [5] ta có

$$nT(r, h) = T(r, h^n) = T(r, \frac{1}{h(z+c)})$$

$$\leq T(r, h(z+c)) + O(1)$$

$$\leq T(r, h) + O(1).$$

Điều này mâu thuẫn với $n \geq 13$. Vì vậy h phải là hàm hằng, kéo theo $h^{n+1} = 1$, do đó $f = hg$ với $h^{n+1} = 1$.

Định lý 3.1. được chứng minh.

KẾT LUẬN

Bài báo nghiên cứu về vấn đề nhận giá trị và duy nhất của tích sai phân của hàm phân hình trên một trường không Archimedean. Bài báo đã nhắc lại Giả thuyết Hayman cho một hàm nguyên trên $\mathbb{C}$, Giả thuyết Hayman cho Toán tử sai phân và tích sai phân p -adic cùng một số kết quả là các câu trả lời chưa trọn vẹn các Giả thuyết Hayman. Kết quả chính của bài báo là các Định lý 2.2, 2.3 và Định lý 3.1. Trong đó, Định lý 3.1 là một kết quả tương tự của C.C.Yang-X. H. Hua [9] cho tích sai phân p -adic.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Escassut, A., Ojeda, J. (2014), "The p -adic Hayman's conjecture when $n = 2$ ", *Complex Variable Elliptic Equ*, Vol.59, No.10, pp. 1451-1456.
2. Halburd, R.G., and R.J. Korhonen (2006), "Nevanlinna theory for the difference operator", *Ann.Acad.Sci.Fenn.Math.*, Vol.31, pp.463-478.
3. Hu, P.C. and Yang, C.C.(2000), *Meromorphic functions over non-Archimedean fields*, Kluwer.
4. Ha Huy Khoai and Vu Hoai An (2011), "Value distribution problem for p -adic meromorphic functions and their derivatives", *Ann. Fac. Sc. Toulouse*, Vol. XX, No. Special, pp.135-149.
5. Ha Huy Khoai and Vu Hoai An (2012), "Value - sharing problem for p -adic meromorphic functions and their difference operators and difference polynomials", *Ukrainian Math. J.*, Vol. 64, N.2, pp. 147-164.
6. Ha Huy Khoai, Vu Hoai An and Nguyen Xuan Lai (2012), "Value sharing problem and Uniqueness for p -adic meromorphic functions", *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp*, Vol.38, pp.71-92.
7. Liu. K. and L.Z. Yang (2009), "Value distribution of the difference operator",

Archiv der Mathematik, Vol.92, No.3, pp.270-278.

8. Laine, I. and C.C.Yang (2007), "Value distribution of difference polynomials", *Proceedings of the Japan Academy. Series A*, vol.83, no.8, pp.148-151.

9. Ojeda, J. (2008), "Hayman's conjecture

in a p -adic field", *Taiwanese J. Math*, No.9, pp. 2295-2313.

10. Yang, C.C. and Hua, X.H.(1997), "Uniqueness and value-sharing of meromorphic functions", *Ann.Acad.Sci.Fenn.Math*, pp.395-406.

Summary

The value-sharing and uniqueness for difference operators and differential multiplication of meromorphic functions over non-Archimedean fields

Nguyen Xuan Lai

Hai Duong College

Phone: 0983524909. Email: laicdhd@gmail.com.

Abstract For meromorphic functions in a non-Archimedean field, there are also many interesting results on value-sharing and uniqueness problems. In [8] Ojeda proved that for a transcendental meromorphic functions f over $\mathbb{K}$, which is an algebraically closed fields of characteristic zero, complete for a non-Archimedean absolute value, the functions $f'f^n - 1$ has infinitely many zeros, if $n \geq 3$. For the case $n = 2$, the same fact was established by Escassut and Ojeda [1]. In [4], similar results are established for differential monomials, difference polynomials and n th derivatives of p -adic meromorphic functions. In 2012, Boussaf studied the uniqueness problem for p -adic meromorphic functions $f'P'(f)$, $g'P'(g)$ sharing a small functions.

In this paper we discuss the value-sharing and uniqueness for difference operators and differential multiplication of meromorphic functions in p -adic fields.

Keyword: Hayman conjecture, Meromorphic functions, Difference operators, Differential multiplication, p -adic field.

Ngày nhận bài: 02/5/2018; **Ngày phản biện:** 27/5/2018; **Ngày duyệt đăng:** 31/5/2018