

VỀ ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU CHO NGHIỆM HỮU HIỆU HENIG VÀ SIÊU HỮU HIỆU CỦA BÀI TOÁN CÂN BẰNG VECTƠ CÓ RÀNG BUỘC

Đinh Diệu Hằng^{1,*}, Trần Văn Sự²

¹Trường Đại học Công nghệ Thông Tin và Truyền Thông - Đại học Thái Nguyên

²Trường Đại học Quảng Nam

TÓM TẮT

Bài báo này cung cấp một điều kiện cần và đủ tối ưu cho nghiệm hữu hiệu Henig và nghiệm siêu hữu hiệu của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc (bao gồm ràng buộc tập và bất đẳng thức tổng quát) thông qua ngôn ngữ của đạo hàm theo hướng trong không gian vô hạn chiều. Đầu tiên chúng tôi chứng minh các kết quả về tính lỗi tổng quát của các hàm lỗi theo nón trên một tập lỗi cho trước. Tiếp theo chúng tôi dẫn các điều kiện tối ưu cho nghiệm hữu hiệu Henig dưới các giả thiết phù hợp. Cuối cùng, chúng tôi thu được kết quả điều kiện tối ưu cho nghiệm siêu hữu hiệu.

Từ khóa: *Bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc, điều kiện cần và đủ tối ưu, nghiệm hữu hiệu Henig, nghiệm siêu hữu hiệu, đạo hàm theo hướng, hàm lỗi theo nón.*

1 MỞ ĐẦU

Bài toán cân bằng vectơ bao hàm nhiều bài toán khác nhau xem như trường hợp đặc biệt, chẳng hạn, bài toán tối ưu vectơ, bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ, bài toán bù vectơ, bài toán điểm cân bằng Nash vectơ, bài toán điểm cố định vectơ, v.v... Do đó, bài toán cân bằng vectơ có vai trò quan trọng trong giải tích phi tuyến và các lĩnh vực nghiên cứu của nó bao gồm: Sự tồn tại nghiệm, cấu trúc tập nghiệm, độ nhạy nghiệm, điều kiện tối ưu và thuật toán tìm nghiệm. Trong các lĩnh vực nghiên cứu này, điều kiện tối ưu cho các loại nghiệm hữu hiệu của bài toán cân bằng vectơ là một trong các chủ đề quan trọng cần được quan tâm nghiên cứu, xem, chẳng hạn, Gong 2008, 2010, Gong và cộng sự 2010, Jahn 2011, Long-Huang và Peng 2011, Luu-Hang 2015 và các tham khảo trong đó. Năm 2008, Gong [1] thiết lập khái niệm nghiệm hữu hiệu yếu, hữu hiệu Henig, hữu hiệu toàn cục, siêu hữu hiệu của các bài toán cân bằng vectơ và cung cấp

các điều kiện cần và đủ tối ưu cho các loại nghiệm này dưới giả thiết về tính lỗi tổng quát của các hàm ràng buộc. Năm 2010, Gong [2, 6] thu được kết quả về điều kiện cần và đủ tối ưu cho bài toán cân bằng vectơ không trơn chỉ có ràng buộc tập cho nghiệm siêu hữu hiệu với hàm ràng buộc khả vi Gateaux và khả vi Fréchet. Năm 2011, Long và cộng sự [4] đã sử dụng tính lỗi suy rộng tổng quát để dẫn các điều kiện cần và đủ tối ưu cho nghiệm siêu hữu hiệu và nghiệm hữu hiệu Henig. Gần đây nhất, Luu-Hang [5] thu được kết quả điều kiện cần và đủ tối ưu cho các loại nghiệm hữu hiệu của bài toán cân bằng vectơ không trơn với ràng buộc cân bằng dưới ngôn ngữ của đạo hàm Michel-Penot, v.v... Trường hợp dùng ngôn ngữ đạo hàm theo hướng để nghiên cứu điều kiện cần và đủ tối ưu cho nghiệm hữu hiệu Henig và siêu hữu hiệu của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc tập và bất đẳng thức tổng quát hiện nay vẫn còn là câu hỏi mở (xem [1], [2], [3], [4], [5], [6]). Mục đích của bài báo này là sử dụng các công cụ của đạo hàm theo hướng cho các hàm lỗi theo nón để cung cấp điều kiện cần và đủ

^{*}Tel: 0934445889, e-mail: dinhhangch16tn@gmail.com

tối ưu cho nghiệm hữu hiệu Henig của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc. Như một sự ứng dụng, điều kiện cần và đủ tối ưu của nghiệm siêu hữu hiệu của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc cũng nhận được kết quả tốt.

2 KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Phần này chủ yếu trình bày các khái niệm về hàm lồi tổng quát, hàm khả vi theo hướng và khả vi Gateaux tại điểm cùng với một số tính chất của chúng liên quan đến tính lồi theo nón trong các không gian tôpô tuyến tính thực; trình bày khái niệm cơ sở của nón, khái niệm nghiệm hữu hiệu Henig và siêu hữu hiệu của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc, được ký hiệu là (VEPC). Các khái niệm ở đây được trích ra từ các bài báo [1], [2], [3], [4] của Gong; Long et al.; Jahn trong danh mục các tài liệu tham khảo. Xuyên suốt bài báo này, nếu không có phát biểu nào khác, ký hiệu X, Y, Z và W là các không gian tôpô tuyến tính thực, trong đó Y, Z được sắp thứ tự bởi các nón lồi đồng nhọn có phần trong khác rỗng C, K tương ứng. Cho A là một tập khác rỗng của X . Không gian đối ngẫu tôpô của Y ký hiệu Y^* , nón đối ngẫu của C là C^* và được định nghĩa bởi

$$C^* = \{\xi \in Y^* : \langle \xi, c \rangle \geq 0 \ (\forall c \in C)\}.$$

Tương tự cho Z^* và K^* . Tựa phần trong của nón C^* được ký hiệu bởi

$$C^\# = \{\xi \in C^* : \langle \xi, c \rangle > 0 \ (\forall c \in C, c \neq 0)\}.$$

Nón theo tập con B trong không gian tôpô tuyến tính Y được ký hiệu bởi

$$C^\Delta(B) = \{\xi \in C^\# : \exists t > 0, \langle \xi, b \rangle \geq t \ (\forall b \in B)\}.$$

Đầu tiên, tính lồi theo nón của một ánh xạ f từ tập A vào không gian Y được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 2.1 ([1], [2], [4]) Một ánh xạ $f : A \rightarrow Y$ được gọi là C -lồi trên A nếu với

mọi $x, y \in A, t \in [0, 1]$, ta có

$$tf(x) + (1-t)f(y) \in f(tx + (1-t)y) + C. \quad (2.1)$$

Trường hợp $Y = \mathbb{R}, C = \mathbb{R}_+$, quan hệ phụ thuộc trong (2.1) trở thành bất đẳng thức:

$$tf(x) + (1-t)f(y) \geq f(tx + (1-t)y),$$

và ánh xạ f được gọi là lồi trên A theo nghĩa thông thường.

Ví dụ 2.1 Các hàm số thực $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ được định nghĩa tương ứng bởi $f(x) = x^2$ và $g(x) = |x|$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ là lồi trên tập xác định của nó. Tuy nhiên, các hàm $-f$ và $-g$ là không lồi trên tập xác định của đó.

Ví dụ 2.2 Cho $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$ và hàm số thực $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = -x^4 + 6x^2 \ \forall x \in A$. Ta có f là lồi trên A bởi vì $f'(x) = -4x^3 + 12x, f''(x) = -12x^2 + 12 = 12(1 - |x|)(1 + |x|) \geq 0$ mọi $x \in A$.

Định nghĩa 2.2 ([3]) Cho ánh xạ $f : A \rightarrow Y$ và điểm $\bar{x} \in A$. Khi đó, (a) Với mỗi $h \in X$, nếu giới hạn sau:

$$Df(\bar{x})(h) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(\bar{x} + th) - f(\bar{x})}{t}$$

tồn tại, thì ta nói $Df(\bar{x})(h)$ là đạo hàm theo hướng của hàm f tại điểm $\bar{x}$ theo hướng h . Nếu giới hạn này tồn tại với mọi $h \in X$, thì f được gọi là khả vi theo hướng tại điểm $\bar{x}$.

(b) Với mỗi $\bar{x} \in A$ và mọi $h \in X$, nếu giới hạn sau:

$$D_G f(\bar{x})(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + th) - f(\bar{x})}{t}$$

tồn tại và $D_G f(\bar{x}) : X \rightarrow Y$ là một ánh xạ tuyến tính liên tục, thì $D_G f(\bar{x})$ gọi là đạo hàm Gateaux của f tại điểm $\bar{x}$. Trường hợp này, hàm f được gọi là khả vi Gateaux tại điểm $\bar{x}$.

Mệnh đề 2.1 Các khẳng định sau là đúng:

- (i) Nếu f khả vi Gateaux tại điểm $\bar{x}$ thì nó khả vi theo hướng tại điểm đó.

- (ii) Nếu f là C -lồi trên X và khả vi theo hướng (tương ứng, khả vi Gateaux) tại mọi điểm $\bar{x} \in X$ thì $Df(\bar{x}) : X \rightarrow Y$ (tương ứng, $D_G f(\bar{x}) : X \rightarrow Y$) là C -lồi trên X .

Chứng minh. Trường hợp (i): Sử dụng định nghĩa, kết quả thu được là hiển nhiên.

Trường hợp (ii): Ta chỉ xét cho trường hợp ánh xạ f khả vi theo hướng tại mọi điểm $\bar{x} \in X$, và trường hợp còn lại được suy ra trực tiếp từ (i). Để chứng minh ta lấy tùy ý $x, y \in X$, $t \in (0, 1]$, $\lambda \in [0, 1]$ và đặt $x(t) = \bar{x} + tx$, $y(t) = \bar{x} + ty$. Sử dụng tính C -lồi của hàm f trên không gian X , ta có biểu diễn sau:

$$\begin{aligned} & \frac{f(\bar{x} + t(\lambda x + (1 - \lambda)y)) - f(\bar{x})}{t} = \\ & \frac{f(\lambda x(t) + (1 - \lambda)y(t)) - f(\bar{x})}{t} \\ & \in \frac{\lambda f(x(t)) + (1 - \lambda)f(y(t)) - f(\bar{x})}{t} - C \\ & \in \frac{\lambda[f(x(t)) - f(\bar{x})] + (1 - \lambda)[f(y(t)) - f(\bar{x})]}{t} - C \\ & \in \lambda \frac{f(x(t)) - f(\bar{x})}{t} + (1 - \lambda) \frac{f(y(t)) - f(\bar{x})}{t} - C. \end{aligned}$$

Cho $t \rightarrow 0^+$ và sử dụng tính đóng của nón C ta nhận được:

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(\bar{x} + t(\lambda x + (1 - \lambda)y)) - f(\bar{x})}{t} \\ & \in \lambda \lim_{t \rightarrow 0^+} \lambda \frac{f(x(t)) - f(\bar{x})}{t} \\ & + (1 - \lambda) \lim_{t \rightarrow 0^+} \lambda \frac{f(y(t)) - f(\bar{x})}{t} - C. \end{aligned}$$

Theo định nghĩa đạo hàm theo hướng của hàm f tại $\bar{x}$ ta thu được

$$\begin{aligned} & \lambda Df(\bar{x})(x) + (1 - \lambda)Df(\bar{x})(y) \\ & \in Df(\bar{x})(\lambda x + (1 - \lambda)y) + C. \end{aligned}$$

Điều này cho ta kết quả cần chứng minh. $\square$

Ví dụ 2.3 Xét hàm giá trị thực f xác định trên tập $A = \mathbb{R}^2$ với

$$f(x, y) = e^{x-|y|} + 2|y| + 3x - 1 \quad \forall (x, y) \in A.$$

Chọn điểm $\bar{x} = (0, 0)$ và áp dụng khái niệm đạo hàm theo hướng của f tại điểm này, ta tính được

$$\begin{aligned} Df(\bar{x})(x, y) &= D_G f(\bar{x})(x, y) = 4x + |y| \\ &\quad \forall (x, y) \in A. \end{aligned}$$

Tiếp theo chúng tôi nhắc lại khái niệm cơ sở của nón, nghiệm hữu hiệu Henig và siêu hữu hiệu của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc, và được phát biểu như sau.

Định nghĩa 2.3 ([1, 2, 4, 5]) Một tập lồi $B \subset Y$ được gọi là một cơ sở của nón C nếu $C = \text{cone} B$ và $0 \notin \text{cl} B$, trong đó $\text{cl} B$ ký hiệu bao đóng của tập B và $\text{cone} B$ là hình nón sinh bởi tập B với

$$\text{cone} B = \{tb : t \geq 0, b \in B\}.$$

Nếu B là một cơ sở của nón C thì tồn tại một phiếm hàm tuyến tính liên tục $y^* \in Y^* \setminus \{0\}$ sao cho

$$r = \inf\{\langle y^*, b \rangle : b \in B\} > \langle y^*, 0 \rangle = 0.$$

Tiếp theo chúng tôi xét và cố định trong bài báo này một lân cận lồi mở cân đối của gốc O trong Y :

$$V_B = \{y \in Y : |\langle y^*, y \rangle| < \frac{r}{2}\}$$

Dễ thấy (xem Gong [1, 2] hoặc Long et al. [4]), với mỗi lân cận lồi U của O thỏa mãn $U \subset V_B$, ta có $\text{cone}(U + B)$ là nón lồi nhọn và $\text{cl}(U + B)$ không chứa gốc O . Do đó, $C \setminus \{0\} \subset \text{int cone}(U + B)$.

Bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc trong bài báo này được ký hiệu bởi (CVEP) được định nghĩa như sau: Cho song hàm $F : A \times A \rightarrow Y$ thỏa mãn điều kiện cân bằng $F(x_0, x_0) = 0$ với mọi $x_0 \in A$, và các hàm mục tiêu

$$g : A \rightarrow Z, \quad h : A \rightarrow W.$$

Tập chấp nhận được của bài toán (CVEP) được ký hiệu bởi

$$S = \{x \in A : g(x) \in -K, h(x) = 0\}.$$

Để cho tiện, với mỗi $\bar{x} \in X$ ta ký hiệu

$$F_{\bar{x}}(S) = F(\bar{x}, S) = \bigcup_{x \in S} F(\bar{x}, x).$$

Định nghĩa 2.4 ([1], [2], [4]) Một vectơ $\bar{x} \in S$ được gọi là nghiệm siêu hữu hiệu của bài toán (CVEP) nếu với mỗi lân cận V của 0 , tồn tại một lân cận U của 0 thỏa mãn

$$\text{cone}(F(\bar{x}, S)) \cap (U - C) \subset V.$$

Định nghĩa 2.5 ([1], [2], [4]) Một vectơ $\bar{x} \in S$ được gọi là nghiệm hữu hiệu Henig của bài toán (CVEP) nếu tồn tại một lân cận lồi cân đối U của 0 , $U \subset V_B$ thỏa mãn

$$\text{cone}(F(\bar{x}, S)) \cap (-\text{int cone}(U + B)) = \emptyset.$$

Mối quan hệ giữa nghiệm siêu hữu hiệu và nghiệm hữu hiệu Henig được mô tả dưới đây như sau.

Mệnh đề 2.2 ([1], [2], [4]) Cho B là một cơ sở của nón C . Ta có

- (i) Nếu $\bar{x} \in S$ là nghiệm siêu hữu hiệu của bài toán (CVEP) thì nó cũng là nghiệm hữu hiệu Henig.
- (ii) Nếu B đóng và bị chặn, thì một nghiệm hữu hiệu Henig của bài toán (CVEP) cũng là nghiệm siêu hữu hiệu của bài toán đó. Ngoài ra, đẳng thức sau đúng $\text{int}C^* = C^\Delta(B)$.

Chú ý 2.1 Trong bài báo này chúng tôi chỉ nghiên cứu điều kiện cần và đủ tối ưu cho nghiệm hữu hiệu Henig bài toán (CVEP) với ràng buộc tập và nón (xem $h = 0$). Đối với điều kiện cần và đủ tối ưu cho nghiệm siêu hữu hiệu chúng tôi xem như hệ quả trực tiếp.

3 KẾT QUẢ MỚI CỦA BÀI BÁO

Đầu tiên chúng tôi cung cấp một điều kiện cần và đủ tối ưu cho nghiệm hữu hiệu Henig của bài toán (CVEP) được phát biểu trong tiểu mục 1 như sau.

Định lý 3.1 Giả sử $\bar{x} \in S$, $F_{\bar{x}}(\cdot) = F(\bar{x}, \cdot) : A \rightarrow Y$ là hàm C -lồi trên A , g là hàm K -lồi trên A và tồn tại $x_1 \in S$ sao cho $Dg(\bar{x})(x_1 - \bar{x}) \in -\text{int}K$. Giả sử thêm rằng nón C có cơ sở B , K là nón lồi đóng và nhọn trong Y và các ánh xạ $F_{\bar{x}}(\cdot)$ và g là khả vi theo hướng tại điểm $\bar{x}$. Khi đó, vectơ $\bar{x}$ là một nghiệm hữu hiệu Henig của bài toán (CVEP) khi và chỉ khi tồn tại các phiếm hàm tuyến tính liên tục $y^* \in C^\Delta(B)$ và $z^* \in K^*$ thỏa mãn

$$\begin{cases} z^*(g(\bar{x})) = 0, \\ \min_{x \in A} \left[y_0^* DF_{\bar{x}}(\bar{x}) + z_0^* Dg(\bar{x}) \right] (x - \bar{x}) = 0. \end{cases}$$

Chứng minh. Điều kiện cần. Giả sử vectơ $\bar{x} \in S$ là một nghiệm hữu hiệu Henig của bài toán (CVEP). Khi đó, tồn tại một lân cận lồi cân đối U của gốc O trong Y với $U \subset V_B$ thỏa mãn

$$\text{cone}(F_{\bar{x}}(S)) \cap (-\text{int cone}(U + B)) = \emptyset.$$

Điều này tương đương với

$$F_{\bar{x}}(S) \cap (-\text{int cone}(U + B)) = \emptyset.$$

Đặt $D = \text{cl cone}(U + B)$. Khi đó D là một nón lồi đóng và nhọn trong Y thỏa mãn $C \subset D$ do

$$C \setminus \{0\} \subset \text{int cone}(U + B) \subset D$$

và

$$F_{\bar{x}}(S) \cap (-\text{int}D) = \emptyset, \quad (*)$$

bởi vì $\text{int cone}(U + B) = \text{int cl cone}(U + B)$. Từ Mệnh đề 2.1, suy ra $DF_{\bar{x}}(\bar{x})(x - \bar{x})$ là C -lồi trên A nên nó cũng là D -lồi trên A , và

$g(\bar{x}) + Dg(\bar{x})(x - \bar{x})$ là K -lồi trên A . Ta thấy rằng hệ phụ thuộc sau

$$\begin{cases} DF_{\bar{x}}(\bar{x})(x - \bar{x}) \in -\text{int}D, \\ g(\bar{x}) + Dg(\bar{x})(x - \bar{x}) \in -\text{int}K \end{cases}$$

không có nghiệm trong A . Thật vậy, ta giả sử ngược lại tồn tại $\hat{x} \in A$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} DF_{\bar{x}}(\bar{x})(\hat{x} - \bar{x}) \in -\text{int}D, \\ g(\bar{x}) + Dg(\bar{x})(\hat{x} - \bar{x}) \in -\text{int}K. \end{cases} \quad (\text{H1})$$

Hiển nhiên hệ (H1) tương đương với

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F_{\bar{x}}(\bar{x} + t(\hat{x} - \bar{x})) - F_{\bar{x}}(\bar{x})}{t} \in -\text{int}D, \\ g(\bar{x}) + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(\bar{x} + t(\hat{x} - \bar{x})) - g(\bar{x})}{t} \in -\text{int}K. \end{cases} \quad (\text{H2})$$

Vì $\text{int}D$ và $\text{int}K$ là các tập mở nên tồn tại $t_0 \in (0, 1)$ thỏa mãn

$$\begin{cases} \frac{F_{\bar{x}}(\bar{x} + t_0(\hat{x} - \bar{x})) - F_{\bar{x}}(\bar{x})}{t_0} \in -\text{int}D, \\ g(\bar{x}) + \frac{g(\bar{x} + t_0(\hat{x} - \bar{x})) - g(\bar{x})}{t_0} \in -\text{int}K. \end{cases} \quad (\text{H3})$$

Hệ (H3) trên kéo theo

$$g(\bar{x} + t_0(\hat{x} - \bar{x})) \in -\text{int}K. \quad (3.1)$$

Bởi vì A là một tập con lồi và $\bar{x}, \hat{x} \in A$, $t_0 \in (0, 1)$, nên từ (3.1) suy ra

$$\bar{x} + t_0(\hat{x} - \bar{x}) \in S. \quad (3.2)$$

Mặt khác, $F_{\bar{x}}(\bar{x}) = 0$, $t_0 \text{int}C = \text{int}C$, ta nhận được

$$F_{\bar{x}}(\bar{x} + t_0(\hat{x} - \bar{x})) \in -\text{int}D. \quad (3.3)$$

Kết hợp điều kiện (3.2)-(3.3), ta nhận được sự mâu thuẫn với (*). Điều này dẫn đến kết quả sau đúng:

$$\begin{aligned} & DF_{\bar{x}}(A - \bar{x}) \times (g(\bar{x}) + Dg(\bar{x})(A - \bar{x})) \cap \\ & (-\text{int}D) \times (-\text{int}K) = \emptyset. \end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned} & (DF_{\bar{x}}(A - \bar{x}) + D) \times (g(\bar{x}) + Dg(\bar{x})(A - \bar{x}) + K) \cap \\ & (-\text{int}D) \times (-\text{int}K) = \emptyset. \end{aligned}$$

Áp dụng định lý tách các tập lồi, tồn tại $(y^*, z^*) \in Y^* \times Z^* \setminus \{(0, 0)\}$ sao cho mọi $d \in D, k \in K, x \in A$:

$$\begin{aligned} \langle y^*, -d \rangle + \langle z^*, -k \rangle & \leq \langle y^*, DF_{\bar{x}}(x - \bar{x}) \rangle + \\ & \langle z^*, g(\bar{x}) + Dg(\bar{x})(x - \bar{x}) + k \rangle. \end{aligned}$$

Dễ dàng thấy rằng $y^* \in C^\Delta(B)$, $z^* \in K^*$ với $\langle z^*, g(\bar{x}) \rangle = 0$ và

$$\begin{aligned} \langle y^*, DF_{\bar{x}}(\bar{x})(x - \bar{x}) \rangle + \langle z^*, Dg(\bar{x})(x - \bar{x}) \rangle & \geq 0 \\ \forall x \in A. \end{aligned}$$

Điều kiện đủ. Lập luận tương tự như trong Gong [1, 2] hay Long-Huang và Peng [4]. $\square$

Một điều kiện cần và đủ tối ưu cho nghiệm siêu hữu hiệu của (CVEP) có thể được phát biểu như sau.

Định lý 3.2 Giả sử $\bar{x} \in S$, $F_{\bar{x}}(\cdot) = F(\bar{x}, \cdot) : A \rightarrow Y$ là hàm C -lồi trên A , g là hàm K -lồi trên A và tồn tại $x_1 \in S$ sao cho $Dg(\bar{x})(x_1 - \bar{x}) \in -\text{int}K$. Giả sử thêm rằng nón C có cơ sở đóng và bị chặn B , K là nón lồi đóng và nhọn trong Y và các ánh xạ $F_{\bar{x}}(\cdot)$ và g là khả vi theo hướng tại điểm $\bar{x}$. Khi đó, vectơ $\bar{x}$ là một nghiệm siêu hữu hiệu của bài toán (CVEP) khi và chỉ khi tồn tại các phiếm hàm tuyến tính liên tục $y^* \in \text{int}C^*$ và $z^* \in K^*$ thỏa mãn

$$\begin{cases} z^*(g(\bar{x})) = 0, \\ \min_{x \in A} [y_0^* DF_{\bar{x}}(\bar{x}) + z_0^* Dg(\bar{x})](x - \bar{x}) = 0. \end{cases}$$

Chứng minh. Áp dụng Mệnh đề 2.2 và Định lý 3.1 ta thu được kết quả cần chứng minh. $\square$

4 KẾT LUẬN

Bài báo đã thiết lập được điều kiện cần và đủ tối ưu cho nghiệm hữu hiệu Henig và nghiệm siêu hữu hiệu của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc tập và nón dựa trên tính lồi tổng quát các đạo hàm theo hướng của các hàm ràng buộc. Kết quả của bài báo được áp dụng để thiết lập các thuật toán số sau này.

Tài liệu

- [1] Xun-Hua Gong (2008), Optimality conditions for vector equilibrium problems, *J. Math. Anal. Appl.*, 342, pp. 1455-1466.
- [2] Xun-Hua Gong (2010), Scalarization and optimality conditions for vector equilibrium problems, *Nonlinear Anal.*, 73, pp. 3598-3612.
- [3] J. Jahn (2011), Theory, applications and extensions second edition vector optimization, *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*.
- [4] X. J. Long, Y. Q. Huang and Z. Y. Peng (2011), Optimality conditions for the Henig efficient solution of vector equilibrium problems with constraints, *Optim. Lett.*, 5, pp. 717-728.
- [5] Do Van Luu, Dinh Dieu Hang (2015), On efficiency conditions for nonsmooth vector equilibrium problems with equilibrium constraints, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 36, pp. 1622-1642.
- [6] Zhen-Fei Wei, Xun-Hua Gong (2010), Kuhn-Tucker optimality conditions for vector equilibrium problems, *J. Ineq. Appl.*, Doi: 10.1155/2010/842715.

SUMMARY

ON OPTIMALITY CONDITIONS FOR HENIG EFFICIENT SOLUTION AND SUPPEREFFICIENT SOLUTION OF CONSTRAINED VECTOR EQUILIBRIUM PROBLEMS

Dinh Dieu Hang^{1,*}, Tran Van Su²

¹University of Information and Communication Technology, Thai Nguyen University

²Quang Nam University

Abstract: This article provides a necessary and sufficient optimality condition for Henig efficient solution and superefficient solution of vector equilibrium problems with constraints (it includes set and general inequality constraints) in terms of directional derivatives in infinite-dimensional spaces. We first prove the results on general convexity of cone-convex functions over a convex set given. We next derive an optimality condition for Henig efficient solutions under suitable assumptions. Finally, we provide an optimality condition for superefficient solution.

Keywords: Vector equilibrium problem with constraints, necessary and sufficient optimality conditions, Henig efficient solutions, superefficient solutions, directional derivatives, cone-convex functions.

^{*}Tel: 0934445889, e-mail: dinhhangch16tn@gmail.com

Ngày nhận bài: 16/5/2018; Ngày phản biện: 29/5/2018; Ngày duyệt đăng: 31/5/2018