

ON HIGHER TOPOLOGICAL COMPLEXITY OF PRODUCT OF TOPOLOGICAL SPACES

Tran Hue Minh*, Nguyen Van Ninh

TNU - University of Education

ARTICLE INFO	ABSTRACT
Received: 18/3/2022 Revised: 23/5/2022 Published: 25/5/2022	The higher order topological complexity is Y.B. Rudyak introduced in 2010, this is a topological invariant that has many relations with other invariants. To compute higher order topological complexity we usually have to introduce upper bounds by inequalities or by constructing section over the space and lower bound using the congruence property of topological space. In this paper, by using the inequalities for the upper bound of the product space and the property of the homogeneity of the product space, we give the results of the calculation of the product of topological spaces which have large topological complexity. These are important topological spaces in robot theory.
KEYWORDS Topological complexity Cohomology Homotopy equivalent Product of topological spaces Fibrational substitute	

ĐỘ PHỨC TẠP TÔPÔ BẬC CAO CỦA TÍCH CÁC KHÔNG GIAN TÔPÔ

Trần Huệ Minh*, Nguyễn Văn Ninh

Trường Đại học Sư phạm - ĐH Thái Nguyên

THÔNG TIN BÀI BÁO	TÓM TẮT
Ngày nhận bài: 18/3/2022 Ngày hoàn thiện: 23/5/2022 Ngày đăng: 25/5/2022	Độ phức tạp tôpô bậc cao được Y.B. Rudyak đưa ra năm 2010, đây là một bất biến tôpô có nhiều liên hệ với các bất biến khác. Để tính toán được độ phức tạp tôpô bậc cao ta thường phải đưa ra các chặn trên bằng các bất đẳng thức hoặc bằng cách xây dựng các nhát cắt trên không gian đó và chặn dưới bằng việc sử dụng tính chất về đối đồng điều của không gian tôpô. Trong bài báo này, bằng việc sử dụng các bất đẳng thức về chặn trên của không gian tích và tính chất về đối đồng điều của không gian tích, chúng tôi đưa ra kết quả việc tính toán của tích các không gian tôpô có độ phức tạp tôpô lớn. Đây là các không gian tôpô quan trọng trong lý thuyết robot.
TỪ KHÓA Độ phức tạp tôpô Đối đồng điều Tương đương đồng luân Tích các không gian tôpô Cái thế phân thớ	

DOI: <https://doi.org/10.34238/tnu-jst.5719>

* Corresponding author. Email: minhth@tnue.edu.vn

1. Độ phức tạp tôpô bậc cao

Cho không gian tôpô liên thông đường X , đặt $J_n, n \in \mathbb{N}$ là tích kết của n đoạn đơn vị $[0, 1]_i, i = 1, \dots, n$ tại điểm cơ sở là 0. Gọi X^{J_n} là không gian các ánh xạ liên tục từ J_n vào X với tôpô compact mở. Xét ánh xạ

$$\begin{aligned} e_n : X^{J_n} &\longrightarrow X^n, \\ \gamma &\longmapsto (\gamma(1_1), \dots, \gamma(1_n)) \end{aligned}$$

với 1_i là đơn vị của $[0, 1]$ thứ i tương ứng. Khi đó e_n là một phân thớ theo nghĩa Serre.

Định nghĩa 1. [1] Độ phức tạp tôpô bậc cao $TC_n(X)$ của không gian tôpô X là số nguyên dương nhỏ nhất k thỏa mãn tồn tại một phủ mở $\{X_i, i = 1, \dots, k\}$ của X^n sao cho trên mỗi tập X_i tồn tại một cắt liên tục $s_i : X_i \rightarrow X^{J_n}$ của e_n (nghĩa là, $e_n \circ s_i = id_{X_i}$).

Định nghĩa này được Y. Rudyak đưa ra trong [1]. Trong trường hợp $n = 2$, $TC_2(X)$ trùng với khái niệm độ phức tạp tôpô $TC(X)$ được M. Farber đưa ra trong [2].

Có thể hiểu $TC_n(X)$ là giống Schwarz của phân thớ e_n .

Chú ý 1. Chú ý rằng e_n là cái thể phân thớ của $d_n : X \rightarrow X^n$ (nghĩa là tồn tại một tương đương đồng luân $h : X \rightarrow X^{J_n}$ sao cho $d_n = e_n \circ h$) và do đó $TC_n(X)$ cũng là giống Schwarz của ánh xạ d_n (xem [1]).

Sau đây là một số tính chất quan trọng của TC_n .

1. Cho X là không gian liên thông đường có kiểu đồng luân của polyhedron n chiều thì

$$TC_n(X) \leq \dim X + 1. \quad (1)$$

2. Vì e_n là cái thể phân thớ của ánh xạ $d_n : X \rightarrow X^n$ nên ta có tính chất sau: Giả sử m là một số nguyên dương, $u_i \in H^*(X^n)$ với $i = 1, \dots, m$ là các lớp đối đồng điều thỏa mãn $d_n^* u_i = 0$ và $u_1 u_2 \dots u_k \neq 0 \in H^*(X^n)$. khi đó $TC_n(X) \geq k + 1$.

Chú ý 2. Giả sử X là không gian liên thông đường và u một lớp đối đồng điều trong $H^*(X)$. Đặt

$$\bar{u} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \overset{i}{\underset{\vee}{u}} \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 \right) - 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes (n-1)u, \quad (2)$$

$$\bar{u}_t = 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \overset{t}{\underset{\vee}{u}} \otimes \dots \otimes 1 - u \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes 1. \quad (3)$$

Đây là các lớp đối đồng điều trong $H^*(X^n) \cong \underbrace{H^*(X) \otimes \dots \otimes H^*(X)}_{n \text{ lần}}$ thỏa mãn $d_n^* \bar{u} = 0$ và

$d_n^* \bar{u}_t = 0$ với mọi $t = 2, \dots, n$.

Việc tính toán độ phức tạp tôpô trường hợp tổng quát rất phức tạp. Do đó, thông thường ta chỉ có thể đưa ra các chặn trên và chặn dưới cho bất biến này. Trong [3], [4], [5] các tác giả đã đưa ra một số kết quả về độ phức tạp tôpô bậc cao cho một số không gian cụ thể.

2. Độ phức tạp của tích các không gian tô pô

Định nghĩa 2. Cho X là không gian tô pô, k là số nguyên dương sao cho tồn tại các lớp đối đồng điều $u_1, \dots, u_k \in H^*(X^n)$ thỏa mãn

1. $d_n^* u_k = 0$;
2. $u_1 \dots u_k \neq 0$.

Số k lớn nhất thỏa mãn điều kiện trên được gọi là độ dài tích cấp n của X . Kí hiệu $cl_n(X)$.

Từ định nghĩa và Chú ý 2 ta dễ dàng suy ra $TC_n(X) \geq cl_n(X) + 1$.

Định nghĩa 3. Cho X là không gian tô pô, X được gọi là không gian có độ phức tạp tô pô lớn nếu $TC_n(X) = cl_n(X)$.

Mệnh đề 1. Cho X và Y là các không gian tô pô liên thông đường và có kiểu đồng luân của các CW – phức hữu hạn. Khi đó

$$cl_n(X \times Y) \geq cl_n(X) + cl_n(Y). \quad (4)$$

Chứng minh. Từ X và Y có kiểu đồng luân của các CW – phức hữu hạn nên ta có đẳng cấu $H^*((X \times Y)^n) \cong H^*(X^n) \otimes H^*(Y^n)$ (xem [6]). Ta sẽ đồng nhất các phần tử tương ứng. Giả sử $cl_n(X) = p$ và $cl_n(Y) = q$. Gọi $u_1, \dots, u_p \in H^*(X^n)$ và $v_1, \dots, v_q \in H^*(Y^n)$ là các lớp đối đồng điều thỏa mãn Định nghĩa 3. Khi đó, các lớp đối đồng điều $u_1 \otimes 1, \dots, u_k \otimes 1$ và $1 \otimes v_1, \dots, 1 \otimes v_q$ là các lớp đối đồng điều trong $H^*(X^n) \otimes H^*(Y^n)$ thỏa mãn điều kiện 1 của Định nghĩa 3. Mặt khác ta có

$$u_1 \otimes 1 \dots u_k \otimes 1 \cdot 1 \otimes v_1 \dots 1 \otimes v_q = \varepsilon u_1 \dots u_k \otimes v_1 \dots v_q.$$

Do đó các lớp đối đồng điều này cũng thỏa mãn điều kiện 2 trong Định nghĩa 3. Từ đó ta có $cl_n(X \times Y) \geq p + q = cl_n(X) + cl_n(Y)$. $\square$

Tiếp theo ta đưa ra chặn trên của không gian tích

Bổ đề 1. Cho (E, p, B, F) là không gian phân thớ nếu tồn tại hai phủ mở $\gamma = \{C_1, \dots, C_s\}$ và $\delta = \{D_1, \dots, D_t\}$ thỏa mãn trên mỗi tập $C_i \cap D_j$ với $(i = 1, \dots, s, j = 1, \dots, t)$ tồn tại nhất cắt của p thì $g(p) \leq s + t - 1$. Ở đây $g(p)$ là giống Shwarz của phân thớ (xem [7]).

Bổ đề được chứng minh chi tiết trong [7]. Sử dụng bổ đề này ta dễ dàng nhận được Mệnh đề

Mệnh đề 2. [7] Cho hai không gian phân thớ (E_1, p_1, B_1, F_1) và (E_2, p_2, B_2, F_2) . Gọi không gian phân thớ tích là $(E_1 \times E_2, p_1 \times p_2, B_1 \times B_2, F_1 \times F_2)$. Khi đó

$$g(p_1 \times p_2) \leq g(p_1) + g(p_2) - 1. \quad (5)$$

Chứng minh. Giả sử $g(p_1) = s$ và $g(p_2) = t$. Khi đó tồn tại các phủ mở $\alpha = \{U_1, \dots, U_s\}$ của B_1 và $\beta = \{V_1, \dots, V_t\}$ của B_2 sao cho trên mỗi U_i tồn tại nhất cắt của p_1 , trên mỗi V_j tồn tại nhất cắt của p_2 . Đặt $C_i = U_i \times B_2, i = 1, \dots, s$ và $D_j = B_1 \times V_j, j = 1, \dots, t$ là hai phủ mở của $B_1 \times B_2$. Trên mỗi tập có dạng $C_i \cap D_j$ tồn tại nhất cắt của $p_1 \times p_2$. Áp dụng bổ đề trên ta được (5) $\square$

Áp dụng mệnh đề trên cho độ phức tạp tôpô bậc cao ta có.

Mệnh đề 3. Cho X và Y là hai không gian liên thông đường. Khi đó :

$$TC_n(X \times Y) \leq TC_n(X) + TC_n(Y) - 1. \quad (6)$$

Từ Mệnh đề 1 và Mệnh đề 3 ta có

Hệ quả 1. Cho X và Y là các không gian tôpô có độ phức tạp tôpô lớn. Khi đó

$$TC_n(X \times Y) = TC_n(X) + TC_n(Y) - 1$$

Đặc biệt $TC_n(X^m) = mTC_n(X) - m + 1$.

3. Kết luận

Trong bài báo này, bằng phương pháp sử dụng các tính chất chặn và chặn dưới của độ phức tạp tôpô bậc cao của tích các không gian tôpô, chúng tôi đưa ra chặn trên và chặn dưới về độ phức tạp tôpô bậc cao của tích các không gian tôpô thông qua các không gian thành phần. Trong trường hợp các không gian thành phần có độ phức tạp tôpô bậc cao lớn thì chúng tôi đã chỉ ra kết quả tính toán cụ thể của không gian tích thông qua các không gian thành phần.

Tài liệu tham khảo

- [1]. Yuli B. Rudyak, "On higher analogs of topological complexity," *Topology and its Applications*, vol. 157, p.p 916-920, 2010.
- [2]. M.Farber, "Topology of robot motion planning," *Topology and its Application*, vol. 140, pp. 245 - 266, 2004.
- [3]. I. Basabe, J. González, Y.B. Rudyak, and D. Tamaki, "Higher topological complexity and its symmetrization," *Algebraic and Geometric Topology* vol. 14, pp.2103–2124, 2014.
- [4] Tran Hue Minh, Nguyen Van Ninh, " The higher topological complexity of wedge product of spheres", *TNU Journal of Science and Technology*, Vol 204, No. 11, pp195-197, 2019.
- [5] Tran Hue Minh, Nguyen Van Ninh, " The higher topological complexity of a complement of complex lines arrangement", *TNU Journal of Science and Technology*, Vol 225, No. 06, pp255-257, 2020.
- [6].Allen Hatcher., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [7]. A.S.Schwarz, *The genus of fiber space*, Amer. Math. Sci, Transl 55(1966) 49 - 140.