KẾT QUẢ SỐ CHO PHƯƠNG PHÁP LẶP DẠNG NEWTON-KANTOROVICH VÀ ĐIỂM GẦN KỀ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VỚI ÁNH XẠ ĐƠN ĐIỆU

Nguyễn Dương Nguyễn*
Trường Đại học Ngoại thương

TÓM TẮT

Trong [1], chúng tôi đã đưa ra phương pháp hiệu chỉnh lặp Newton-Kantorovich để tìm nghiệm của phương trình không chỉnh phi tuyến với ánh xạ đơn điệu trong không gian Banach. Tại mỗi bước lặp của phương pháp này, ta thu được một phương trình tuyến tính mà nghiệm của nó có thể tìm được bằng phương pháp xấp xỉ hữu hạn chiều (xem [2], [3]). Trong bài báo này, chúng tôi sẽ đưa ra ví dụ số để minh họa cho việc xấp xỉ hữu hạn chiều của phương pháp hiệu chỉnh lặp Newton-Kantorovich trên. Ngoài ra, chúng tôi cũng đưa ra ví dụ số minh họa cho các cải biên của phương pháp điểm gần kề đã được chúng tôi đề xuất trong [4] để tìm không điểm của ánh xạ đơn điệu cực đại trong không gian Hilbert.

Từ khóa: *Không gian Banach; ánh xạ đơn điệu; phương pháp hiệu chỉnh lặp Newton-Kantorovich; không gian Hilbert; ánh xạ đơn điệu cực đại; phương pháp điểm gần kề.*

GIỚI THIỆU

Cho E là không gian Banach thực, phản xạ và E^* là không gian đối ngẫu của E. Xét phương trình

$$A(x) = f, f \in E^*, \tag{1}$$

trong đó A là một ánh xạ đơn điệu và liên tục từ không gian Banach E vào E^*, với miền xác định $D(A) = E$. Giả sử tập nghiệm của (1), ký hiệu là S, khác rỗng và thay cho f ta chỉ biết xấp xỉ của nó là f_δ thỏa mãn

$$\|f_\delta - f\| \leq \delta \to 0. \tag{2}$$

Nếu A không có tính chất đơn điệu mạnh hoặc đơn điệu đều, thì bài toán (1), nói chung, là một bài toán đặt không chỉnh. Để giải (1), ta phải sử dụng các phương pháp ổn định. Trong [2] và [5], Nguyễn Bường đã đưa ra phương pháp hiệu chỉnh dạng Browder-Tikhonov để giải (1) trên cơ sở phương trình phụ thuộc tham số như sau:

$$A(x) + \alpha B(x - x^+) = f_\delta, \tag{3}$$

trong đó B là ánh xạ tuyến tính và đơn điệu mạnh thỏa mãn $\overline{D(B)} = E$ và miền giá trị $R(B) = E^*$, x^+ là một phần tử bất kì trong E và phần tử này giúp cho ta tìm một nghiệm của (1) theo ý muốn. Nguyễn Bường đã chứng minh được rằng với mỗi $\alpha > 0$, $f_\delta \in E^*$, phương trình (3) có nghiệm duy nhất x_α^δ và nếu α, $\delta/\alpha \to 0$ thì dãy $\{x_\alpha^\delta\}$ hội tụ tới $x_* \in S$ thỏa mãn bất đẳng thức:

$$\langle B(x^+ - x_*), x_* - y\rangle \geq 0, \forall y \in S$$

(xem [2], [5]). Nghiệm x_α^δ của (3) có thể xấp xỉ hữu hạn chiều bằng phương pháp Galerkin được mô tả bởi phương trình (xem [2], [3]):

$$A_n(x) + \alpha B_n(x - x^+) = f_n^\delta, \tag{4}$$

với $A_n = P_n^* A P_n, B_n = P_n^* B P_n, f_n^\delta = P_n^* f_\delta$, trong đó P_n là phép chiếu tuyến tính đi từ E lên không gian con E_n của E thỏa mãn $E_n \subset E_{n+1}, \forall n$, $P_n x \to x, \forall x \in E$, $\|P_n\| \leq c$, với c là hằng số và P_n^* là toán tử liên hợp của P_n. Ta có kết quả sau:

Định lí 1 ([2], [5]) *Giả sử $P_n^* B P_n x \to Bx, \forall x \in D(B)$. Điều kiện cần và đủ để với mỗi $\alpha > 0$ và $f_\delta \in E^*$, dãy nghiệm $\{x_{\alpha n}^\delta\}$ của (4) hội tụ đến nghiệm hiệu chỉnh x_α^δ của phương trình hiệu chỉnh (3) là $P_n x \to x$ khi $n \to \infty$, với mọi $x \in E$.*

Tuy nhiên, khi A là ánh xạ phi tuyến thì (3) là bài toán phi tuyến. Để khắc phục hạn chế này, trong [1], chúng tôi đã đưa ra phương pháp hiệu chỉnh lặp Newton-Kantorovich để giải (1) như sau:

$$\begin{aligned} A(z_n) + A'(z_n)(z_{n+1} - z_n) \\ + \alpha B(z_{n+1} - x^+) = f_{\delta_n}, \end{aligned} \tag{5}$$

ở đây ký hiệu $A'(z)(.)$ là đạo hàm Fréchet của A tại điểm $z \in E$ và f_{δ_n} thỏa mãn (2)

* *Tel:* 0984328949, *Email: duongnguyen@ftu.edu.vn*

với f_δ được thay thế bởi f_{δ_n}. Vì A là ánh xạ đơn điệu nên $A'(z)(.)$ cũng là ánh xạ đơn điệu, với mỗi $z \in E$ cố định (xem [6]). Áp dụng phương pháp (4) cho (5), ta được

$$\begin{aligned} A_n(z_n) + A'_n(z_n)(z_{n+1} - z_n) \\ + \alpha B_n(z_{n+1} - x^+) = f_n^{\delta_n}. \end{aligned} \qquad (6)$$

Tiếp theo, ta xét bài toán:

$$\text{Tìm } p_* \in H \text{ sao cho } 0 \in A(p_*), \qquad (7)$$

ở đây H là không gian Hilbert và $A : H \to 2^H$ là ánh xạ đơn điệu cực đại. Phần tử p_* là nghiệm của bài toán (7) được gọi là một không điểm của ánh xạ A. Ký hiệu $ZerA$ là tập các không điểm của ánh xạ A. Một trong những phương pháp đầu tiên để tìm nghiệm của bài toán (7) phải kể đến phương pháp điểm gần kề được đưa ra bởi Rockafellar [7] như sau:

$$x^{k+1} = J_k x^k + e^k, \ k \geq 1, \qquad (8)$$

trong đó $J_k = (I + r_k A)^{-1}$ được gọi là toán tử giải của A với tham số $r_k > 0$, ở đây e^k là vectơ sai số và I là ánh xạ đơn vị của H. Do J_k là ánh xạ đơn trị (xem [8]) nên một trong những ưu điểm của phương pháp điểm gần kề là đã đưa bài toán đa trị về bài toán đơn trị để giải. Rockafellar đã chứng minh được rằng phương pháp mà ông đưa ra hội tụ yếu tới một không điểm của A dưới giả thiết $ZerA \neq \emptyset$, $\sum_{k=1}^{\infty} \|e^k\| < \infty$ và $r_k \geq \varepsilon, \forall k \geq 1$, với ε là một số dương nào đó. Sau này, Güler [9] đã chỉ ra rằng phương pháp điểm gần kề chỉ đạt được sự hội tụ yếu mà không hội tụ mạnh trong không gian vô hạn chiều. Với mục đích đạt được sự hội tụ mạnh, một số cải biên của phương pháp điểm gần kề đã được đưa ra (xem [8], [10]-[16]). Sự hội tụ mạnh của các cải biên này đều được đưa ra dưới các điều kiện dẫn tới dãy tham số của toán tử giải của A không khả tổng. Vì vậy, một câu hỏi đặt ra là: có tồn tại một cải biên của phương pháp điểm gần kề mà sự hội tụ mạnh của nó được đưa ra dưới điều kiện dãy tham số của toán tử giải là khả tổng? Để trả lời câu hỏi này, trong [4], chúng tôi đưa hai ra hai cải biên mới của phương pháp điểm gần kề tương ứng với dãy $\{x^k\}$ và $\{z^k\}$ được xác định bởi:

$$x^{k+1} = J^k(t_k u + (1 - t_k)x^k + e^k), \qquad (9)$$

và

$$z^{k+1} = t_k u + (1 - t_k) J^k z^k + e^k, \qquad (10)$$

ở đây $J^k = J_1 J_2 \cdots J_k$ là hợp của k toán tử giải của A. Để thu được các phương pháp (9) và (10), chúng tôi đã đề xuất phương pháp lặp:

$$x^{k+1} = J^k[(I - t_k F)x^k + e^k], \qquad (11)$$

để tìm nghiệm $p_* \in H$ của bài toán bất đẳng thức biến phân:

$$p_* \in C : \langle F p_*, p_* - p \rangle \leq 0, \forall p \in C, \qquad (12)$$

trong trường hợp $C = ZerA$, $F : H \to H$ là ánh xạ η-đơn điệu mạnh và γ-giả co chặt. Ký hiệu

$$|Ax| = \inf\{\|y\| : y \in Ax\}, x \in D(A).$$

Gọi A^0 là ánh xạ xác định bởi:

$$A^0 x = \{y \in Ax : \|y\| = |Ax|\}, x \in D(A).$$

Do A là ánh xạ đơn điệu cực đại nên A^0 là ánh xạ đơn trị (xem [4]). Sự hội tụ của phương pháp (11) được trình bày trong định lí sau:

Định lí 2 ([4]) *Cho A là ánh xạ đơn điệu cực đại trong không gian Hilbert H thỏa mãn $D(A) = H$, $C := ZerA \neq \emptyset$ và ánh xạ A^0 là giới nội, F là ánh xạ η-đơn điệu mạnh, γ-giả co chặt với $\eta + \gamma > 1$ và dãy $\{x^k\}$ được xác định bởi phương pháp (11). Giả sử t_k, r_k và e^k thỏa mãn các điều kiện*

(C1) $t_k \in (0;1)$, $\forall k \geq 1$, $\lim_{k\to\infty} t_k = 0$ *và* $\sum_{k=1}^{\infty} t_k = \infty$;

(C2) $r_k > 0$, $\forall k \geq 1$ *và* $\sum_{k=1}^{\infty} r_k < +\infty$;

(C3) $\lim_{k\to\infty}(\|e^k\|/t_k) = 0$.

Khi đó, dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh tới phần tử p_* khi $k \to \infty$, ở đây p_* là nghiệm duy nhất của bài toán bất đẳng thức biến phân (12) với $C = ZerA$.

Trong [4], chúng tôi đã chỉ ra rằng, từ (11), bằng việc chọn $F = I - \tilde{f}$, trong đó $\tilde{f} = aI + (1-a)u$, với $a \in (0;1)$, u là một điểm cố định thuộc H và sau đó, ký hiệu lại $t_k := (1-a)t_k$, ta thu sẽ được phương pháp (9). Để đạt được phương pháp (10), từ (11), trước hết đặt $z^k = (I - t_k F)x^k + e^k$, sau đó chọn F như ở trên và cuối cùng ký hiệu lại $t_k := (1-a)t_k$.

Các mục tiếp theo của bài báo này sẽ lần lượt trình bày ví dụ số về việc áp dụng phương pháp (6) để giải phương trình tích phân kiểu Hammerstein và ví dụ số áp dụng các phương pháp (9) và (10) để tìm cực tiểu của một phiếm hàm lồi, chính thường và nửa liên tục dưới.

VÍ DỤ SỐ VỀ XẤP XỈ HỮU HẠN CHIỀU CHO PHƯƠNG PHÁP HIỆU CHỈNH LẶP NEWTON-KANTOROVICH VỚI ÁNH XẠ ĐƠN ĐIỆU

Cho $k(t,s)$ là hàm số thực hai biến số, xác định trên hình vuông $[a,b]\times[a,b]$, không suy biến và không âm thỏa mãn: tồn tại một hằng số $q\neq 2$, $1<q<\infty$ sao cho

$$\int_a^b\int_a^b |k(t,s)|^q dsdt < +\infty. \qquad (13)$$

Khi đó, ánh xạ A được xác định bởi

$$(Ax)(t)=\int_a^b k(t,s)x(s)ds, \qquad (14)$$

ở đây $x(t)\in L_p[a,b]$, là ánh xạ liên tục và đi từ không gian $L_p[a,b]$ vào không gian $L_q[a,b]$, với $(1/p)+(1/q)=1$ (xem [17]). Vì $k(t,s)\geq 0$ nên với $x(t)$ và $y(t)$ thuộc $L_p[a,b]$ mà $x(t)\geq y(t)$, ta có

$$\begin{aligned}&\langle A(x)-A(y),x-y\rangle\\ &=\int_a^b [A(x)-A(y)](x-y)dt\\ &=\int_a^b\left[\int_a^b k(t,s)[x(s)-y(s)]ds\right]\\ &\quad\times[x(t)-y(t)]dt\geq 0.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức này cũng đúng cho trường hợp $x(t)<y(t)$. Do đó, A là ánh xạ đơn điệu, xác định trên $L_p[a,b]$. Ký hiệu chuẩn của không gian $L_p[a,b]$ là $\|.\|_p$. Bây giờ, ta xét phương trình tích phân Hammerstein tuyến tính sau:

$$(Ax)(t)=\int_a^b k(t,s)x(s)ds=f(t), \qquad (15)$$

với $f(t)\in L_q[a,b]$. Giả sử nghiệm $x(s)$ của (15) hai lần khả vi Fréchet và thỏa mãn điều kiện biên $x(a)=x(b)=0$. Tiếp theo, ta lấy

$$Bx(t)=x(t)-x''(t),$$

với $x(t)\in D(B)$ là bao đóng của tất cả các hàm trong $C^2[a,b]$ theo metric của $W_q^2[a,b]$, thỏa mãn $x(a)=x(b)=0$. Rõ ràng B là toán tử tuyến tính. Ngoài ra, $\overline{D(B)}=L_p[a,b]$ và $R(B)=L_q[a,b]$ (xem [18]). Cho $\{t_0^n=a<t_1^n<\cdots<t_n^n=b\}$ là một phân hoạch đều của đoạn $[a,b]$ với $h=t_i^n-t_{i-1}^n=(b-a)/n$. Xấp xỉ không gian E bởi dãy các không gian con tuyến tính E_n, xác định bởi $E_n=L\{\psi_1,\psi_2,...,\psi_n\}$, trong đó

$$\psi_i(t)=\begin{cases}1, \text{nếu } t\in(t_{i-1}^n,t_i^n]\\ 0, \text{nếu } t\notin(t_{i-1}^n,t_i^n].\end{cases}$$

Chọn phép chiếu

$$P_nx(t)=\sum_{i=1}^n x(t_i^n)\psi_i(t). \qquad (16)$$

Ta có $\|P_n\|_p=1$ và $\|(I-P_n)x\|=O(1/n)$, với $x\in L_p[a,b]$ bất kỳ (xem [6] và [19]). Suy ra $P_nx\to x$ khi $n\to\infty$, với mọi $x\in L_p[a,b]$. Dễ dàng chứng minh được

$$P_n^*y(t)\approx\sum_{i=1}^n y(t_i^n)\psi_i(t), y(t)\in L_q[a,b].$$

Vì B liên tục nên ta có $P_n^*BP_nx\to Bx$ khi $n\to\infty$, với mọi $x\in D(B)$. Vậy, các điều kiện của Định lí 1 được thỏa mãn. Cho $\{s_0^n=a<s_1^n<\cdots<s_n^n=b\}$ cũng là một phân hoạch đều của đoạn $[a,b]$, khi đó $z_n(t_i^n)=z_n(s_i^n), i=0,1,2,...,n$. Ta có

$$A'(x(t))y(t)=\int_a^b k(t,s)y(t)ds, \forall x,y\in L_p[a,b].$$

Với phép chiếu P_n như trong (16), áp dụng phương pháp (6) cho phương trình tích phân (15), ta được:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^n\left[\int_a^b k(t_i^n,s)\sum_{j=1}^n z_{n+1}(s_j^n)\psi_j(s)ds\right]\psi_i(t)\\ &+\alpha\sum_{i=1}^n\left[z_{n+1}(t_i^n)-\sum_{j=1}^n x^+(t_j^n)\psi_j(t_i^n)\right.\\ &\left.-z''_{n+1}(t_i^n)\right]\psi_i(t)=\sum_{i=1}^n f_{\delta_n}(t_i^n)\psi_i(t).\end{aligned} \qquad (17)$$

Đẳng thức (17) tồn tại nếu

$$\begin{aligned}&\int_a^b k(t_i^n,s)\sum_{j=1}^n z_{n+1}(s_j^n)\psi_j(s)ds\\ &+\alpha\left[z_{n+1}(t_i^n)-\sum_{j=1}^n x^+(t_j^n)\psi_j(t_i^n)-z''_{n+1}(t_i^n)\right]\\ &=f_{\delta_n}(t_i^n), i=1,2,...,n.\end{aligned}$$

Sử dụng tính chất cộng tính của tích phân và định nghĩa của hàm $\psi_j(s)$, ta thu được

$$\sum_{l=1}^{n}\left(\int_{s_{l-1}^n}^{s_l^n} k(t_i^n,s)ds\right) z_{n+1}(s_l^n) + \alpha\left[z_{n+1}(t_i^n) - \sum_{j=1}^{n} x^+(t_j^n)\psi_j(t_i^n) - z''_{n+1}(t_i^n)\right] = f_{\delta_n}(t_i^n), i=1,2,...,n. \quad (18)$$

Đặt

$$z_i^{n+1} = z_{n+1}(t_i^n), c_{il}^n = \int_{s_{l-1}^n}^{s_l^n} k(t_i^n,s)ds,$$

$$\tilde{x}_i^n = x^+(t_i^n), f_i^{\delta n} = f_{\delta_n}(t_i^n).$$

Khi đó hệ (18) trở thành

$$\sum_{l=1}^{n} c_{il}^n z_l^{n+1} + \alpha\left(z_i^{n+1} - \sum_{j=1}^{n}\tilde{x}_j^n\psi_j(t_i^n) - z''_{n+1}(t_i^n)\right) = f_i^{\delta n}, i=1,2,...,n.$$

Bằng việc thay đạo hàm cấp hai $z''_{n+1}(t_i^n)$ bằng tỷ sai phân, ta có

$$z''_{n+1}(t_i^n) = \frac{z_{i+1}^{n+1} - 2z_i^{n+1} + z_{i-1}^{n+1}}{h^2}, i=1,2,...,n.$$

Khi $i=1$ và $i=n$ thì $z_{n+1}(t_0^n)$ và $z_{n+1}(t_{n+1}^n)$ không xác định. Để điều kiện biên thỏa mãn, ta lấy $z_{n+1}(t_0^n) = z_{n+1}(t_{n+1}^n) = 0$.
Với $i=1$, ta có

$$\left[c_{11}^n + \alpha\left(1+\frac{2}{h^2}\right)\right] z_1^{n+1} + \left(c_{12}^n - \frac{\alpha}{h^2}\right) z_2^{n+1} + \sum_{l=3}^{n} c_{1l}^n z_l^{n+1} = f_1^{\delta n} + \alpha\tilde{x}_1^n. \quad (19)$$

Với $i=2,3,...,n-1$, ta có

$$\left(c_{i,i-1}^n - \frac{\alpha}{h^2}\right) z_{i-1}^{n+1} + \left[c_{ii}^n + \alpha\left(1+\frac{2}{h^2}\right)\right] z_i^{n+1} + \left(c_{i,i+1}^n - \frac{\alpha}{h^2}\right) z_{i+1}^{n+1} + \sum_{\substack{l=1\\ l\neq i-1,i,i+1}}^{n} c_{il}^n z_l^{n+1} = f_i^{\delta n} + \alpha\tilde{x}_i^n. \quad (20)$$

Với $i=n$, ta có

$$\sum_{l=1}^{n-2} c_{nl}^n z_l^{n+1} + \left[c_{nn}^n + \alpha\left(1+\frac{2}{h^2}\right)\right] z_n^{n+1} + \left(c_{n,n-1}^n - \frac{\alpha}{h^2}\right) z_{n-1}^{n+1} = f_n^{\delta n} + \alpha\tilde{x}_n^n. \quad (21)$$

Từ (19), (20) và (21), ta thu được hệ phương trình tuyến tính gồm n phương trình và n ẩn, với các ẩn là $z_1^{n+1}, z_2^{n+1}, z_3^{n+1}, \ldots, z_{n-1}^{n+1}, z_n^{n+1}$. Giải hệ phương trình tuyến tính này, ta thu được xấp xỉ của $z_{n+1}(t)$ là nghiệm của (5).
Xét phương trình (15) với $a=0$, $b=1$, $k(t,s)=|t-s|$. Rõ ràng

$$\int_0^1\int_0^1 |k(t,s)|^{3/2}dsdt = \int_0^1\int_0^1 |t-s|^{3/2}dsdt < +\infty.$$

Vì vậy, ta xét $q=3/2$ và $p=3$, tức là $E=L_3[0,1]$ và $E^*=L_{3/2}[0,1]$. Ta chỉ ra B là ánh xạ đơn điệu mạnh. Với mọi $x(t)\in C^2[0,1]$ thỏa mãn $x(0)=x(1)=0$, ta có

$$\langle Bx,x\rangle = \int_0^1 x^2(t)dt - \int_0^1 x''(t)x(t)dt = \int_0^1 x^2(t)dt + \int_0^1 (x'(t))^2dt$$

Hơn nữa, theo [20], ta thu được

$$\|x\|_3^2 \le \left(\frac{3(5/3)^{1/2}}{2(5/2)^{1/3}\widetilde{B}(1/3,1/2)}\right)^2 \int_0^1 (x'(t))^2dt \approx 0,115\int_0^1 (x'(t))^2dt,$$

ở đây $\widetilde{B}(x,y)$ là hàm Beta. Suy ra $\langle Bx,x\rangle \ge \|x\|_3^2$. Do B là ánh xạ tuyến tính nên B là ánh xạ 1-đơn điệu mạnh. Với nghiệm chính xác là $x_*(s)=s(1-s)$, ta tính được

$$f(t) = -\frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{6}t + \frac{1}{12}.$$

Sau đây là kết quả tính toán với việc lấy $x^+(t)=2{,}22$ và $f_{\delta_n}=f+\delta_n$, ở đây $\delta_n = 1/(1+n)^2$:

Bảng 1. *Kết quả tính toán với* $\alpha = 0{,}5$

n	$\|z_{n+1}-x_*\|_3$	n	$\|z_{n+1}-x_*\|_3$
4	0,2689666069	64	0,0424663883
8	0,1620043546	128	0,0298464819
16	0,1003942097	256	0,0230577881
32	0,0640826159	1024	0,0203963532

Bảng 2. *Kết quả tính toán với* $\alpha = 0{,}1$

n	$\|z_{n+1} - x_*\|_3$	n	$\|z_{n+1} - x_*\|_3$
4	0,2600031372	64	0,0388129413
8	0,1534801504	128	0,0269295563
16	0,0936525099	256	0,0204623013
32	0,0591546836	1024	0,0176684288

Bảng 3. *Kết quả tính toán với* $\alpha = 0{,}01$

n	$\|z_{n+1} - x_*\|_3$	n	$\|z_{n+1} - x_*\|_3$
4	0,1948813288	64	0,0295640389
8	0,1176798737	128	0,0196621910
16	0,0739066898	256	0,0138863679
32	0,0461148835	1024	0,0099425015

Qua các kết quả tính toán trên, ta thấy, việc áp dụng phương pháp (6) cho kết quả hội tụ tới nghiệm của phương trình (15) là khá tốt. Đặc biệt, với α càng nhỏ và tiến tới 0 thì z_{n+1} càng tiến gần tới nghiệm chính xác x_*.

VÍ DỤ SỐ VỀ PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐỂ TÌM KHÔNG ĐIỂM CỦA ÁNH XẠ ĐƠN ĐIỆU CỰC ĐẠI

Cho không gian $\mathbb{R}^2$ với tích vô hướng và chuẩn lần lượt được xác định bởi $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$ và $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, ở đây $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Xét bài toán tối ưu lồi sau: tìm phần tử $p_* \in \mathbb{R}^2$ sao cho

$$f(p_*) = \inf_{x\in\mathbb{R}^2} f(x). \qquad (22)$$

Ta đã biết, nếu $f(x)$ là phiếm hàm lồi, chính thường và nửa liên tục dưới thì dưới vi phân ∂f là một ánh xạ đơn điệu cực đại (xem [21]). Khi đó, bài toán (22) tương đương với bài toán tìm một không điểm của ∂f (xem [21]). Sau đây, ta sẽ áp dụng các phương pháp (9) và (10) để tìm nghiệm của bài toán (22) với hàm $f(x)$ cho cụ thể như sau:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x_2 \le 1,\\ x_2 - 1, & \text{nếu } x_2 > 1. \end{cases}$$

Với $r > 0$, ta có

$$(I + r\partial f)^{-1}(x) = \begin{cases} (x_1, x_2), & \text{nếu } x_2 \le 1,\\ \left(x_1, \dfrac{x_2}{1+r}\right), & \text{nếu } x_2 > 1. \end{cases}$$

Lấy $a = 1/2$, $u = (0; 2)$, nghiệm duy nhất của bài toán (22) là $p_* = (0; 1)$. Sử dụng phương pháp (9) với $t_k = 1/(k+1)$, $r_i = 1/(i(i+1))$, $e^k = (0; 0)$ và điểm xuất phát là $(2,0; 6,0)$, ta thu được bảng kết quả sau:

Bảng 4

k	x_1^{k+1}	x_2^{k+1}	k	x_1^{k+1}	x_2^{k+1}
1	1,5000000000	3,3333333333	500	0,1007993740	0,9999960565
10	0,6727523804	0,9982716570	1000	0,0713204022	0,9999986543
20	0,4895426850	0,9997219609	2000	0,0504468881	0,9999996953
50	0,3152358030	0,9998464349	5000	0,0319113937	0,9999999357
100	0,2242781046	0,9999270505	20000	0,0159571926	0,9999999954

Bảng sau trình bày kết quả tính toán khi áp dụng phương pháp (10) với a, u, t_k, r_i, e^k và điểm xuất phát cho như ở trên:

Bảng 5

k	z_1^{k+1}	z_2^{k+1}	k	z_1^{k+1}	z_2^{k+1}
1	1,5000000000	3,5000000000	500	0,1007993740	1,0009925330
10	0,6727523804	1,0367234670	1000	0,0713204022	1,0004981392
20	0,4895426850	1,0225868918	2000	0,0504468881	1,0002497795
50	0,3152358030	1,0092381210	5000	0,0319113937	1,0000999281
100	0,2242781046	1,0048024836	20000	0,0159571926	1,0000249980

Qua các bảng trên, ta thấy, việc áp dụng các phương pháp (9) và (10) cho kết quả hội tụ khá tốt tới nghiệm của bài toán (22).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyen Ng. D., Buong Ng. (2015), "Regularization Newton-Kantorovich iterative method for nonlinear monotone ill-posed equations on Banach spaces", *Kỷ yếu Hội thảo Quốc gia lần thứ XVIII: Một số vấn đề chọn lọc của Công nghệ thông tin và truyền thông, thành phố Hồ Chí Minh, ngày 5-6 tháng 11 năm 2015*, Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật, 278-281.

[2] Nguyễn Bường (2001), *Hiệu chỉnh bài toán phi tuyến bằng phương pháp toán tử đơn*

điệu, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội.

[3] Buong Ng. (1996), "Regularization by linear operators", *Acta Mathematica Vietnamica*, 21(1), 135-145.

[4] Buong Ng., Hoai P. T. T., Nguyen Ng. D. (2017), "Iterative methods for a class of variational inequalities in Hilbert spaces", *J. Fixed Point Theory Appl.*, 19(4), 2383–2395.

[5] Buong Ng. (1991), "The regularization of variational inequalities and a general approximation scheme for regularized solutions in Banach spaces", *Ukrain. Mat. Zh.*, 43(9), 1273-1276.

[6] Vainberg M. M. (1972), *Variational method and method of monotone operators*, Nauka, Moscow.

[7] Rockafellar R. T. (1976), "Monotone operators and the proximal point algorithm", *Siam J. Control and optimization*, 14(5), 877-898.

[8] Wang F., Cui H. (2015), "Convergence of the generalized contraction-proximal point algorithm in a Hilbert space", *Optimization*, 64(4), 709-715.

[9] Güler O. (1991), "On the convergence of the proximal point algorithm for convex minimization", *Siam J. Control and optimization*, 29(2), 403-419.

[10] Boikanyo O. A., Morosanu G. (2010), "A proximal point algorithm converging strongly for general errors", *Optim. Lett.*, 4, 635-641.

[11] Kamimura S., Takahashi W. (2000), "Approximating solutions of maximal monotone operators in Hilbert spaces", *J. Approx. Theory*, 106, 226-240.

[12] Lehdili N., Moudafi A. (1996), "Combining the proximal algorithm and Tikhonov regularization", *Optimization*, 37, 239-252.

[13] Marino G., Xu H. K. (2004), "Convergence of generalized proximal point algorithms", *Comm. Pure Appl. Anal.*, 3, 791-808.

[14] Tian Ch. A., Song Y. (2013), "Strong convergence of a regularization method for Rockafellar's proximal point algorithm", *J. Glob. Optim.*, 55, 831-837.

[15] Xu H. K. (2006), "A regularization method for the proximal point algorithm", *J. Glob. Optim.*, 36, 115-125.

[16] Yao Y., Noor M. A. (2008), "On convergence criteria of generalized proximal point algorithms", *J. Comp. Appl. Math.*, 217, 46-55.

[17] Banach S. (1932), *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa.

[18] Pavlenko V. N. (1979), "Nonlinear equations with discontinuous operators in Banach spaces", *Ukr. Mat. Zh.*, 31(5), 569-572.

[19] Prenter P. M. (1975), *Splines and variational methods*, Wiley-Interscience, NewYork.

[20] Talenti G. (1976), "Best constant in Sobolev inequality", *Ann. Mat. Pura Appl.*, 110, 353-372.

[21] Bauschke H. H., Combettes P. L. (2017), *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces (Second edition)*, Springer, Switzerland.

SUMMARY

NUMERICAL RESULTS FOR ITERATION METHODS OF THE NEWTON-KANTOROVICH TYPE AND THE PROXIMAL POINT TYPE INVOLVING MONOTONE MAPPINGS

Nguyen Duong Nguyen*
Foreign Trade University

In [1], we proposed the Newton-Kantorovich iterative regularization method for finding solutions of nonlinear ill-posed equations involving monotone mappings in Banach spaces. At the each iterative step, we get a linear equation that its solution can be obtained by the finite-dimensional approximation method (see [2], [3]). In this paper, we will give a numerical example to illustrate the finite-dimensional approximation of the Newton-Kantorovich iteration regularization method. In addition, we also provide a numerical example to illustrate the modifications of the proximal point method that we proposed in [4] to find a zero of a maximal monotone mapping in Hilbert spaces.

Keywords: *Banach space; monotone mapping; the Newton-Kantorovich iterative regularization method; Hilbert space; maximal monotone mapping; the proximal point method.*

* *Tel: 0984328949, Email: duongnguyen@ftu.edu.vn*

Ngày nhận bài: 30/01/2018; Ngày phản biện: 13/02/2018; Ngày duyệt đăng: 05/3/2018