PHƯƠNG PHÁP HIỆU CHỈNH LẶP BẬC KHÔNG GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TOÁN TỬ PHI TUYẾN ĐƠN ĐIỆU ĐẶT KHÔNG CHỈNH

Trần Thị Hương
Trường Cao đẳng Kinh tế - Kỹ thuật
Đại học Thái Nguyên

TÓM TẮT

Rất nhiều vấn đề của khoa học, công nghệ, kinh tế và sinh thái ...dẫn đến việc giải các bài toán đặt không chỉnh. Do tính không ổn định của bài toán đặt không chỉnh nên ta phải sử dụng các phương pháp giải ổn định sao cho khi sai số của các dữ kiện đầu vào càng nhỏ thì nghiệm xấp xỉ tìm được càng gần với nghiệm chính xác của bài toán ban đầu. Trong bài báo này, tác giả đề xuất một phương pháp hiệu chỉnh lặp bậc không giải hệ N phương trình toán tử phi tuyến đơn điệu đặt không chỉnh với 1 toán tử có tính đơn điệu, *hemi*-liên tục, $N-1$ toán tử khác có tính chất ngược đơn điệu mạnh. Ví dụ số nhằm minh họa cho phương pháp đề xuất cũng được đề cập trong bài báo này.

Từ khóa: *Bài toán đặt không chỉnh, phương pháp hiệu chỉnh lặp, đơn điệu, hemi-liên tục, ngược đơn điệu mạnh.*

GIỚI THIỆU

Giả sử H là không gian Hilbert thực với tích vô hướng và chuẩn được kí hiệu lần lượt bởi $\langle .,. \rangle$ và $\|.\|$. Ta xét bài toán tìm nghiệm của hệ phương trình toán tử phi tuyến:

$$A_i(x) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N, \tag{1}$$

ở đây N là hằng số dương cố định, $A_0 : H \to H$ là toán tử đơn điệu, *hemi*-liên tục có tập xác định $\mathcal{D}(A_0)$ trùng với H và $A_i : H \to H$ là các toán tử λ_i-ngược đơn điệu mạnh, $\mathcal{D}(A_i) = H$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Gọi S_i là tập nghiệm của phương trình thứ i của hệ (1), tức là $S_i = \{x \in H : A_i(x) = 0\}$. Trong bài báo này, ta luôn giả thiết rằng, tập $S := \bigcap\limits_{i=0}^{N} S_i \neq \emptyset$.

Như đã biết, (xem [1]), nếu không có thêm điều kiện đặc biệt đặt lên toán tử, chẳng hạn như tính đơn điệu đều hoặc đơn điệu mạnh, thì mỗi phương trình của hệ (1) là một bài toán đặt không chỉnh theo nghĩa nghiệm không phụ thuộc liên tục vào dữ kiện ban đầu. Do đó, hệ (1), nói chung, cũng là bài toán đặt không chỉnh. Những phương pháp cơ bản được sử dụng rộng rãi để tìm nghiệm xấp xỉ của hệ (1) phải được kể đến là phương pháp kiểu hiệu chỉnh lặp (xem [5], [6], [7]), phương pháp kiểu hiệu chỉnh Tikhonov (xem [9], [11]).

Để giải hệ (1), Nguyễn Bường (2006, [4]) đã đưa ra phương pháp hiệu chỉnh dạng Browder–Tikhonov khi A_i, $i = 0, 1, \dots, N$ là các toán tử đơn điệu, *hemi*-liên tục và có tính chất thế năng. Trong [3], [8] các tác giả đã cải biên phương pháp này trong trường hợp toán tử A_0 đơn điệu, liên tục Lipschitz, trong khi $A_1, \dots, A_N$ là các toán tử ngược đơn điệu mạnh.

Nguyễn Thị Thu Thủy (2012, [10]) đã đề xuất phương pháp hiệu chỉnh lặp bậc không tìm nghiệm xấp xỉ cho hệ (1) khi A_i, $i = 0, 1, \dots N$ là các toán tử ngược đơn điệu mạnh trong

[0]*Tel: 0986446177, e-mail: huongtoanch16@gmail.com

không gian Hilbert H. Dựa trên ý tưởng này, tác giả đề xuất một phương pháp hiệu chỉnh lặp bậc không giải hệ (1) với việc giảm nhẹ điều kiện đặt lên các toán tử A_i như sau: cho trước $z_0 \in H$, dãy $\{z_m\}$ được xác định bởi sơ đồ lặp:

$$z_{m+1} = z_m - \beta_m \Big[A_0(z_m) + \alpha_m^{\mu} \sum_{i=1}^{N} A_i(z_m) + \alpha_m^{\mu+1}(z_m - x_*) \Big], \quad (2)$$

ở đây $\{\alpha_m\}$, $\{\beta_m\}$ là các dãy số dương, x_* là phần tử thuộc H nhưng không thuộc S.

Sự hội tụ của dãy lặp $\{z_m\}$ đến nghiệm $x_0 \in S$ có x_*-chuẩn nhỏ nhất, tức là

$$\|x_0 - x_*\| = \min_{z \in S} \|z - x_*\|,$$

khi $m \to +\infty$ được chứng minh với điều kiện đặt lên cho các toán tử A_i và cách chọn các dãy tham số $\{\alpha_m\}$, $\{\beta_m\}$ thích hợp. Để đạt được kết quả này, ta xét phương trình toán tử

$$A_0(x) + \alpha_m^{\mu} \sum_{i=1}^{N} A_i(x) + \alpha_m^{\mu+1}(x - x_*) = 0. \quad (3)$$

Trước khi trình bày các kết quả chính, ta sẽ nhắc lại một số khái niệm.

Định nghĩa 1. Toán tử $A : H \to H$ được gọi là

i) đơn điệu nếu

$$\langle A(x) - A(y), x - y \rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in H;$$

ii) đơn điệu chặt nếu dấu "=" của bất đẳng thức trên chỉ xảy ra khi $x = y$;

iii) đơn điệu cực đại nếu A đơn điệu và đồ thị $G(A)$ của A không bị chứa trong đồ thị của bất kỳ toán tử đơn điệu nào khác;

vi) ngược đơn điệu mạnh với hằng số λ nếu với mọi $x, y \in H$, tồn tại hằng số dương λ sao cho

$$\langle A(x) - A(y), x - y \rangle \geq \lambda \|A(x) - A(y)\|^2.$$

Định nghĩa 2. Toán tử $A : H \to H$ được gọi là

i) *hemi*-liên tục tại điểm x^0 thuộc H nếu $x^0 + t_n x \in H$ với mọi $x \in H$, $t_n \in \mathbb{R}$ thì $A(x^0 + t_n x) \rightharpoonup A(x^0)$ khi $t_n \to 0^+$;

ii) liên tục Lipschitz nếu tồn tại hằng số $L > 0$ sao cho với mọi $x, y \in H$ ta có

$$\|A(x) - A(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

KẾT QUẢ CHÍNH

Định lý 1. *Giả sử A_0 là toán tử đơn điệu, hemi-liên tục, $\mathcal{D}(A_0) = H$, A_i là các toán tử λ_i-ngược đơn điệu mạnh, $\mathcal{D}(A_i) = H$, với $i = 1, \ldots, N$ và $S := \cap_{i=0}^{N} S_i \neq \emptyset$. Khi đó,*

i) với mỗi $\alpha_m > 0$ phương trình (3) có nghiệm duy nhất x_m.

ii) nếu $0 < \alpha_m \leq 1$, $\alpha_m \to 0$ khi $m \to +\infty$ thì $\lim_{m \to +\infty} x_m = x_0 \in S$ có x_*-chuẩn nhỏ nhất và

$$\|x_{m+1} - x_m\| = O\left(\frac{|\alpha_{m+1} - \alpha_m|}{\alpha_m^{\mu+1}} \right),$$

ở đây x_{m+1} là nghiệm của (3) khi α_m được thay thế bởi α_{m+1}.

Chứng minh:

i) Do A_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ là các toán tử λ_i-ngược đơn điệu mạnh, nên A_i là toán tử đơn điệu và L_i-liên tục Lipschitz với hằng số $L_i = 1/\lambda_i$. Do đó A_i là toán tử *hemi*-liên tục. Suy ra, với mỗi $\alpha_m > 0$ cố định, toán tử $A := A_0 + \alpha_m^{\mu} \sum_{i=1}^{N} A_i$ là toán tử đơn điệu, *hemi*-liên tục với $\mathcal{D}(A) = H$, Chứng tỏ A là toán tử đơn điệu cực đại (xem [1]). Do vậy, theo Định lý 1.7.4 trong [1] phương trình (3) có nghiệm. Mặt khác, do I là toán tử đơn điệu chặt nên $A + \alpha_m^{\mu+1} I$ cũng đơn điệu chặt. Vì vậy, với mỗi $\alpha_m > 0$ cố định phương trình (3) có nghiệm duy nhất x_m.

ii) Lập luận tương tự như trong [10] ta có $\lim_{m \to +\infty} x_m = x_0 \in S$ có x_*-chuẩn nhỏ nhất. Tiếp theo, ta giả sử x_{m+1} là nghiệm của (3) khi α_m được thay thế bởi α_{m+1}. Từ (3) ta có

$$\begin{aligned}
&\langle A_0(x_{m+1}), x_{m+1} - x_m\rangle \\
&+ \alpha_{m+1}^{\mu} \sum_{i=1}^{N} \langle A_i(x_{m+1}), x_{m+1} - x_m\rangle \\
&+ \alpha_{m+1}^{\mu+1} \langle x_{m+1} - x_*, x_{m+1} - x_m\rangle \\
&+ \langle A_0(x_m), x_m - x_{m+1}\rangle \\
&+ \alpha_m^{\mu} \sum_{i=1}^{N} \langle A_i(x_m), x_m - x_{m+1}\rangle \\
&+ \alpha_m^{\mu+1} \langle x_m - x_*, x_m - x_{m+1}\rangle \\
&+ \alpha_{m+1}^{\mu} \sum_{i=1}^{N} \langle A_i(x_m), x_{m+1} - x_m\rangle \\
&+ \alpha_{m+1}^{\mu} \sum_{i=1}^{N} \langle A_i(x_m), x_m - x_{m+1}\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Theo giả thiết, A_i, $i = 0, 1, \ldots, N$ là các toán tử đơn điệu nên từ bất đẳng thức trên ta có

$$\begin{aligned}
&\left(\alpha_{m+1}^{\mu} - \alpha_m^{\mu}\right) \sum_{i=1}^{N} \langle A_i(x_m), x_{m+1} - x_m\rangle \\
&+ \alpha_m^{\mu+1} \langle x_m - x_{m+1}, x_m - x_{m+1}\rangle \\
&+ \left(\alpha_{m+1}^{\mu+1} - \alpha_m^{\mu+1}\right) \langle x_{m+1} - x_*, x_{m+1} - x_m\rangle \le 0,
\end{aligned}$$

suy ra

$$\begin{aligned}
&\langle x_{m+1} - x_m, x_{m+1} - x_m\rangle \\
&\le \frac{|\,\alpha_{m+1}^{\mu} - \alpha_m^{\mu}\,|}{\alpha_m^{\mu+1}} \sum_{i=1}^{N} \langle A_i(x_m), x_m - x_{m+1}\rangle \\
&\quad + \frac{|\,\alpha_{m+1}^{\mu+1} - \alpha_m^{\mu+1}\,|}{\alpha_m^{\mu+1}} \langle x_{m+1} - x_*, x_m - x_{m+1}\rangle.
\end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned}
\|x_{m+1} - x_m\| \le& \frac{|\,\alpha_{m+1}^{\mu} - \alpha_m^{\mu}\,|}{\alpha_m^{\mu+1}} \sum_{i=1}^{N} \|A_i(x_m)\| \\
&+ \frac{|\,\alpha_{m+1}^{\mu+1} - \alpha_m^{\mu+1}\,|}{\alpha_m^{\mu+1}} \|x_{m+1} - x_*\|.
\end{aligned}$$

Đặt

$$d_1 = \max_i \|A_i(x_m)\|, \quad d_0 \ge \|x_{m+1} - x_*\|.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\|x_{m+1} - x_m\| \le& N d_1 \frac{|\,\alpha_{m+1}^{\mu} - \alpha_m^{\mu}\,|}{\alpha_m^{\mu+1}} \\
&+ d_0 \frac{|\,\alpha_{m+1}^{\mu+1} - \alpha_m^{\mu+1}\,|}{\alpha_m^{\mu+1}}.
\end{aligned}$$

Áp dụng khai triển

$a^m - b^m = (a - b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \cdots + b^{m-1})$,

ta có

$$\|x_{m+1} - x_m\| \le \widetilde{M} \frac{|\,\alpha_{m+1} - \alpha_m\,|}{\alpha_m^{\mu+1}},$$

ở đây $\widetilde{M}$ là hằng số dương. Vì vậy

$$\|x_{m+1} - x_m\| = O\left(\frac{|\,\alpha_{m+1} - \alpha_m\,|}{\alpha_m^{\mu+1}}\right).$$

□

Để chứng minh sự hội tụ của dãy lặp (2) ta cần sử dụng kết quả sau.

Bổ đề 1. (xem [2]) *Giả sử $\{u_k\}$, $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ là các dãy số dương thỏa mãn điều kiện:*

i) $u_{k+1} \le (1 - a_k)u_k + b_k$, $0 \le a_k \le 1$;

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$, $\lim_{k\to+\infty} \frac{b_k}{a_k} = 0$.

Khi đó $\lim_{k\to+\infty} u_k = 0$.

Định lý sau chỉ ra sự hội tụ của dãy lặp (2).

Định lý 2. *Giả sử các dãy tham số $\{\alpha_m\}$, $\{\beta_m\}$ trong (2) và các toán tử A_i, $i = 0, 1, \ldots, N$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

i) *A_0 là toán tử đơn điệu, liên tục Lipschitz, A_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ là các toán tử λ_i-ngược đơn điệu mạnh;*

ii) *$1 \ge \alpha_m \searrow 0$, $\beta_m \to 0$ khi $m \to +\infty$;*

iii) $\lim_{m\to+\infty} \frac{|\alpha_{m+1} - \alpha_m|}{\beta_m \alpha_m^{2(\mu+1)}} = 0$, $\lim_{m\to+\infty} \frac{\beta_m}{\alpha_m^{\mu+1}} = 0$;

iv) $\sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \alpha_m^{\mu+1} = +\infty$.

Khi đó, $\lim_{m\to+\infty} z_m = x_0 \in S$ có x_*-chuẩn nhỏ nhất.

Chứng minh: Trước tiên ta có

$$\|z_m - x_0\| \le \|z_m - x_m\| + \|x_m - x_0\|.$$

Theo Định lý 1, số hạng thứ 2 trong vế phải của bất đẳng thức này dần đến 0 khi $m \to +\infty$. Vì vậy, ta chỉ cần chứng minh z_m xấp xỉ x_m khi $m \to +\infty$. Thật vậy, giả sử, $\triangle_m = \|z_m - x_m\|$. Khi đó,

$$\begin{aligned}\triangle_{m+1} &= \|z_{m+1} - x_{m+1}\| \\ &= \Big\| z_m - x_m - \beta_m\big[A_0(z_m) + \alpha_m^\mu \sum_{i=1}^N A_i(z_m) \\ &\quad + \alpha_m^{\mu+1}(z_m - x_*)\big] - (x_{m+1} - x_m)\Big\| \qquad (4)\\ &\le \Big\| z_m - x_m - \beta_m\big[A_0(z_m) + \alpha_m^\mu \sum_{i=1}^N A_i(z_m) \\ &\quad + \alpha_m^{\mu+1}(z_m - x_*)\big]\Big\| + \|x_{m+1} - x_m\|.\end{aligned}$$

Ta có các đánh giá sau:

$$\begin{aligned}&\Big\| z_m - x_m - \beta_m\big[A_0(z_m) + \alpha_m^\mu \sum_{i=1}^N A_i(z_m) \\ &\qquad + \alpha_m^{\mu+1}(z_m - x_*)\big]\Big\|^2 \\ &= \|z_m - x_m\|^2 + \beta_m^2 \Big\| A_0(z_m) + \alpha_m^\mu \sum_{i=1}^N A_i(z_m) \\ &\qquad + \alpha_m^{\mu+1}(z_m - x_*)\Big\|^2 \qquad (5)\\ &- 2\beta_m \Big\langle z_m - x_m, A_0(z_m) + \alpha_m^\mu \sum_{i=1}^N A_i(z_m) \\ &\qquad + \alpha_m^{\mu+1}(z_m - x_*) - \\ &\big[A_0(x_m) + \alpha_m^\mu \sum_{i=1}^N A_i(x_m) + \alpha_m^{\mu+1}(x_m - x_*)\big]\Big\rangle \\ &\le \big(1 - 2\beta_m\alpha_m^{\mu+1}\big)\|z_m - x_m\|^2 + \beta_m^2 \times \\ &\Big\| A_0(z_m) + \alpha_m^\mu \sum_{i=1}^N A_i(z_m) + \alpha_m^{\mu+1}(z_m - x_*)\Big\|^2.\end{aligned}$$

Do toán tử A_0 liên tục Lipschitz, các toán tử A_i, $i = 1, 2, \dots, N$ là λ_i-ngược đơn điệu mạnh nên

$$\begin{aligned}&\Big\| A_0(z_m) + \alpha_m^\mu \sum_{i=1}^N A_i(z_m) + \alpha_m^{\mu+1}(z_m - x_*)\Big\|^2 \\ &= \Big\| A_0(z_m) - A_0(x_m) + \alpha_m^{\mu+1}(z_m - x_m) \\ &\qquad + \alpha_m^\mu \sum_{i=1}^N \big[A_i(z_m) - A_i(x_m)\big]\Big\|^2 \\ &\le c\|z_m - x_m\|^2,\end{aligned}$$

ở đây, c là hằng số dương. Từ (4), (5) và bất đẳng thức cuối cùng, ta có

$$\begin{aligned}\triangle_{m+1} &\le \Big(\triangle_m^2(1 - 2\beta_m\alpha_m^{\mu+1} + c\beta_m^2)\Big)^{1/2} \\ &\quad + O\Big(\frac{|\alpha_{m+1} - \alpha_m|}{\alpha_m^{\mu+1}}\Big).\end{aligned}$$

Bình phương hai vế của bất đẳng thức này, sau đó áp dụng bất đẳng thức sơ cấp (xem [2])

$$(a+b)^2 \le (1 + \alpha_m\beta_m)a^2 + \Big(1 + \frac{1}{\alpha_m\beta_m}\Big)b^2,$$

ta nhận được

$$\begin{aligned}\triangle_{m+1}^2 &\le \triangle_m^2\big(1 - 2\beta_m\alpha_m^{\mu+1} + \alpha_m\beta_m + c\beta_m^2 \\ &\qquad - 2\beta_m^2\alpha_m^{\mu+2} + c\alpha_m\beta_m^3\big) \qquad (6)\\ &\quad + \Big(1 + \frac{1}{\alpha_m\beta_m}\Big) O\Big(\frac{|\alpha_{m+1} - \alpha_m|}{\alpha_m^{\mu+1}}\Big)^2.\end{aligned}$$

Các điều kiện của Bổ đề 1 cho dãy số $\{\triangle_m\}$ được thỏa mãn vì (6) và các điều kiện ii) – iv) của định lý với

$$\begin{aligned}a_m &= 2\beta_m\alpha_m^{\mu+1} - \alpha_m\beta_m - c\beta_m^2 + 2\beta_m^2\alpha_m^{\mu+2} \\ &\quad - c\alpha_m\beta_m^3, \\ b_m &= \Big(1 + \frac{1}{\alpha_m\beta_m}\Big) O\Big(\frac{|\alpha_{m+1} - \alpha_m|}{\alpha_m^{\mu+1}}\Big)^2.\end{aligned}$$

□

Chú ý 1. Dãy tham số $\beta_m = (1+m)^{-1/2}$ và $\alpha_m = (1+m)^{-p}$, $0 < 2p < 1/(N+1)$ thỏa mãn các điều kiện ii)- iv) của Định lý 2.

VÍ DỤ SỐ MINH HỌA

Trong mục này, tác giả trình bày một ví dụ số nhằm minh họa cho việc dùng phương pháp hiệu chỉnh lặp bậc không (2) để tìm nghiệm xấp xỉ cho hệ phương trình toán tử phi tuyến đơn điệu (1). Chương trình tính toán được viết bằng ngôn ngữ MATLAB 7.0 và đã được chạy thử nghiệm trên máy tính LENOVO Y430, RAM 1,7 GHz.

Xét hệ (1) khi A_i là các ma trận vuông cấp 4 được xác định bởi

$$A_i := B_i^T B_i, \qquad i = 0, 1, 2,$$

ở đây

$$B_0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 \\ 8 & 6 & -7 & 4 \\ 4 & 3 & -8 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ta có A_0, A_1, A_2 là các ma trận đối xứng xác định không âm với $\det(A_i) = 0, i = 0, 1, 2$, nên hệ (1) là bài toán đặt không chỉnh. Trong trường hợp này hệ (1) là hệ gồm 12 phương trình, 4 ẩn số. Như vậy, hệ (1) cho ta nghiệm là một siêu phẳng trong $\mathbb{R}^4$, $x_0 = (0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$ là nghiệm có chuẩn nhỏ nhất của hệ (1).

Ta áp dụng phương pháp hiệu chỉnh lặp (2) để tìm nghiệm xấp xỉ cho ví dụ này khi $x_* = 0$ như sau:

$$z_{m+1} = z_m - \beta_m \Big(A_0(z_m) + \alpha_m^{\mu} \big(A_1(z_m) + A_2(z_m)\big) + \alpha_m^{\mu+1} z_m \Big),$$

với $\alpha_m = (1+m)^{-1/12}$, $\beta_m = (1+m)^{-1/2}$, $\mu = 1/2$, $z_0 = (1, 1, 1, 1)^T \in \mathbb{R}^4$ thỏa mãn Định lý 2.

Việc kiểm tra tính đúng đắn của sơ đồ lặp dựa vào giá trị sai số giữa hai xấp xỉ liên tiếp, nếu $err = \max_{1 \le j \le 4} | z_{m+1}^{(j)} - z_m^{(j)} | \le 10^{-10}$ thì tính toán dừng lại. Ta có bảng kết quả tính toán dưới đây.

m	err	$\|x_0 - z_m\|$
39	3.5639×10^{-5}	2.2910×10^{-5}
105	2.1926×10^{-7}	1.2220×10^{-7}
190	1.9485×10^{-9}	3.8012×10^{-9}
220	6.0766×10^{-10}	1.2072×10^{-9}

Bảng 1. Kết quả tính toán của phương pháp (2)

Nhận xét 1. Khi số lần lặp càng lớn thì sai số giữa hai xấp xỉ liên tiếp càng nhỏ và nghiệm xấp xỉ càng gần với nghiệm chính xác.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Alber Y. I., Ryazantseva I. P. (2006), *Nonlinear ill-posed Problems of monotone Types*, Springer Verlag.

[2] Bakushinskii A. B., Goncharskii A. G. (1989), *Ill-Posed Problems: Numerical Methods and Applications*, Moscow Univ. Press.

[3] Buong N. (2004), "Generalized dicscrepancy principle and ill-posed equations involving accretive operators", *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, Korea, 9(1), pp. 73-78.

[4] Buong N. (2006), "Regularization for unconstrained vector optimization of convex functionals in Banach spaces", *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiziki* , 46(3), pp. 372-378.

[5] Engl H.W., Hanke M., Neubauer A. (1996), *Regularization of Inverse Problems*, Kluwer Dordrecht.

[6] Kaltenbacher B., Neubauer A., Scherzer O. (2008), *Iterative regularization methods for nonlinear ill-posed problems*, Walter de Gruyter, Berlin.

[7] Kaltenbacher B., F., Schuster T. (2009), "Iterative methods for nonlinear ill-posed problems in Banach spaces: convergence and applications to parameter identification problems", *Inverse Problems*, 2.

[8] Kim J. K., Buong N. (2010), "Regularization inertial proximal point algorithm for monotone hemicontinuous mapping and inverse strongly-monotone mappings in Hilbert spaces", *J. of Inequalities and Applications*, Article ID 451916.

[9] Morozov V. A. (1993) *Regularization Methods for Ill-Posed Problems*, CRC Press, Florida .

[10] Thuy N. T. T. (2012), "Regularization for a system of inverse-strongly monotone operator equations", *Nonlinear. Funct. Anal. Appl* , 17(1), pp. 71-87.

[11] Tikhonov A.N., Arsenin A.N. (1977), *Solutions of Ill-Posed Problems*, Wiley, New York.

SUMMARY

ITERATIVE REGULARIZATION METHOD OF ZERO ORDER FOR SOLVING SYSTEM OF NONLINEAR MONOTONE ILL-POSED EQUATIONS

Tran Thi Huong
College of Economics and Technology - TNU

Many issues of science, technology, economics and ecology, etc. lead to solving ill-posed problems; due to the instability of this type of problem, stable methods must be applied to solve it, such that the smaller the errors of the input data, the closer the approximate solution to the correct solution of the original problem. In this article, the author proposes the iterative regularization method of zero order for solving the system of nonlinear monotone ill-posed equations with A_0 which is monotone hemi-continuous and with the others which are inverse-strongly monotone. Numerical examples to illustrate the proposed method are also included in this article.

Keywords: *Ill-posed problem, iterative regularization method, monotone, hemi-continuous, inverse-strongly monotone.*

[0]*Tel: 0986 446 177, e-mail: huongtoanch16 @gmail.com

Ngày nhận bài: 04/10/2017; Ngày phản biện: 24/10/2017; Ngày duyệt đăng: 30/11/2017