

RESEARCH ON THE APPLICATION OF THE MATRIX METHOD TO SOLVE STATIC EQUILIBRIUM PROBLEMS

Nguyen Trong Kien*, Phan Van Duc, Ho Van Phuc, Ho Van Hung, Truong Quoc Dinh
Vinh University

ARTICLE INFO		ABSTRACT
Received:	01/11/2023	Matrices are an important part of mathematics. Matrix theories have been used to solve many technical problems in different fields such as in physics, matrices have applications in electronics, mechanics, and optics. In the field of computer engineering, it is used for image processing, etc. In this article, we mainly focus on matrix operations and their application in solving static equilibrium problems that were previously mainly solved analytically by converting the equilibrium equations in analytical form to matrix form. The purpose is to provide a new application that allows the convenient use of specialized software such as Maple, Matlab,... to help solve static equilibrium problems faster. The motivation for using the matrix method is the desire to help engineering students approach the achievements of information technology, arousing interest in learning. The effectiveness of the matrix method when combined with Matlab software has been demonstrated in four specific examples. Hopefully, this will be an effective improvement method for engineering mechanics.
Revised:	29/01/2024	
Published:	30/01/2024	
KEYWORDS		
Matrix		
Equation		
Balance		
Statics		
Analytics		

NGHIÊN CỨU ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP MA TRẬN ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN CÂN BẰNG TĨNH HỌC

Nguyễn Trọng Kiên*, Phan Văn Đức, Hồ Văn Phúc, Hồ Văn Hùng, Trương Quốc Định
Trường Đại học Vinh

THÔNG TIN BÀI BÁO	TÓM TẮT
Ngày nhận bài: 01/11/2023	Ma trận là một phần quan trọng của toán học. Các lý thuyết ma trận đã được sử dụng để giải quyết nhiều vấn đề kỹ thuật trong các lĩnh vực khác nhau như trong vật lý, ma trận có ứng dụng trong điện tử, cơ học, quang học. Trong lĩnh vực kỹ thuật máy tính, nó được sử dụng để xử lý hình ảnh,... Trong bài báo này, chúng tôi chủ yếu tập trung vào các phép toán ma trận và ứng dụng của nó trong việc giải các bài toán cân bằng tĩnh học mà trước đây chủ yếu được giải bằng phương pháp giải tích, bằng cách chuyển đổi các phương trình cân bằng dưới dạng giải tích thành các phương trình cân bằng dưới dạng ma trận. Mục đích là cung cấp một ứng dụng mới cho phép sử dụng thuận lợi các phần mềm chuyên dụng như Maple, Matlab,... giúp giải nhanh hơn các bài toán cân bằng tĩnh học. Động lực sử dụng phương pháp ma trận là mong muốn giúp sinh viên kỹ thuật tiếp cận tốt hơn với các thành tựu của công nghệ thông tin, khơi dậy sự hứng thú trong học tập. Hiệu quả của phương pháp ma trận khi kết hợp với phần mềm Matlab đã được chứng minh trong bốn ví dụ cụ thể. Hy vọng đây sẽ là một phương pháp cải tiến hiệu quả cho môn cơ học kỹ thuật.
Ngày hoàn thiện: 29/01/2024	
Ngày đăng: 30/01/2024	
TỪ KHÓA	
Ma trận	
Phương trình	
Cân bằng	
Tĩnh học	
Giải tích	

DOI: <https://doi.org/10.34238/tnu-jst.9107>

* Corresponding author. Email: nguyentrongkien82@gmail.com

1. Giới thiệu

Cơ học là một trong những môn học nền tảng được giảng dạy trong các trường đại học kỹ thuật. Nó không những là cơ sở cho hàng loạt các môn kỹ thuật cơ sở và kỹ thuật chuyên ngành mà còn xây dựng tiềm lực tư duy khoa học cho các kỹ sư và cán bộ khoa học kỹ thuật tương lai. Cơ học lý thuyết phát sinh và phát triển gắn liền với sự phát triển của lực lượng sản xuất xã hội và trí thức văn hóa của nhân loại, đặc biệt gắn liền với sự phát triển của kỹ thuật.

Cơ học lý thuyết là cơ sở và xuất phát điểm cho nhiều bộ môn cơ học khác như sức bền vật liệu, lý thuyết đàn hồi, thủy lực,... chúng được xây dựng trên các định luật chung của cơ học lý thuyết với các định luật bổ sung do các tính chất đặc thù của thực thể vật chất. Cơ học lý thuyết đã có lịch sử phát triển lâu đời do lao động của nhiều thế hệ các nhà bác học. Ngay trong thời kỳ cổ đại người ta cũng đã biết áp dụng nhiều quy luật cơ học, ví dụ quy luật mặt phẳng nghiêng, đòn bẩy,... để xây dựng nhiều công trình đồ sộ vẫn còn tồn tại đến ngày nay. Sau đây là một số giai đoạn phát triển tiêu biểu của cơ học lý thuyết.

Sự phát triển mạnh mẽ của khoa học tự nhiên, trong đó có cơ học, bắt đầu từ thời kỳ Phục Hưng. Trong thời kỳ này nổi bật là họa sĩ thiên tài người Ý, Lêôna đơ Vinxi (1452-1519). Ông có nhiều khảo sát trong lĩnh vực cơ cấu, ma sát trong máy và chuyển động trên mặt phẳng nghiêng. Cùng thời còn có nhà bác học Ba Lan, Nicolai Copernic (1473-1543), ông đã xây dựng lý thuyết về chuyển động của các hành tinh.

Các khảo sát có tầm quan trọng đặc biệt, có ý nghĩa nền tảng cho sự phát triển cơ học là các công trình của nhà bác học người Ý, Galile (1564-1642). Trước Galile, cơ học được phát triển chủ yếu là phần tĩnh học. Chính Galile đã đề cập đến các định luật chuyển động dưới tác dụng của lực, tức phần **động lực học**. Ông đã phát minh ra định luật quán tính. Ông cũng đặt nền móng đầu tiên về lý thuyết độ bền của các công trình.

Các công trình của Newton (Niuton) (1643-1727) đã hoàn tất thời kỳ đầu của khoa học tự nhiên. Niuton đã thống nhất, mở rộng và xây dựng cơ sở cho các thành tựu hiện thời của cơ học nhờ một hệ thống các định luật mà ngày nay chúng có tên là hệ tiên đề động lực học mang tên ông.

Tiếp quá trình phát triển này là các đóng góp của các nhà bác học D'Alembert (Đalămbe) (1717-1783) mà tên tuổi gắn liền với nguyên lý nổi tiếng Đalămbe. Euler (Ôle) (1707-1783), viện sĩ viện hàn lâm khoa học Nga, người đã có nhiều công trong việc sử dụng các phương pháp giải tích để nghiên cứu các bài toán động lực học vật rắn. Hướng giải tích hóa cơ học mà ngày nay được gọi là cơ học giải tích được trình bày trong tác phẩm sáng lập ngành 'Cơ học giải tích' của nhà bác học người Pháp, Lagrange (Lagơrăng) trong đó cơ học đã được trình bày nhờ phương pháp giải tích dựa vào một nguyên lý chung, không có một hình vẽ nào. Giai đoạn này cũng gắn liền với các nhà bác học Hamilton (Haminton) (1805-1865), Jacobi (1804-1851), Gauss (Gaoxo) (1777-1805),... [1] – [4].

Ngày nay, sự phát triển của cơ học lý thuyết gắn liền với các vấn đề của vật lý và kỹ thuật hiện đại như cơ học vũ trụ, điều khiển tự động, kỹ thuật rô bốt,... Việc giải các bài toán của môn cơ học chủ yếu dùng phương pháp giải tích [1] – [5], phương pháp này có tính chính xác cao, tuy nhiên một số bài toán dùng phương pháp này có khối lượng tính toán lớn, do đó tính toán chậm, đặc biệt là các bài toán nhiều ẩn số hay bài toán không gian. Để giảm khối lượng tính toán và áp dụng các thành tựu của công nghệ thông tin, một số tác giả đã sử dụng phương pháp ma trận và dùng các phần mềm như Mathcad, Matlab để thiết lập và giải các bài toán này [5] – [7]. Cụ thể, Đỗ Sanh [5] đã dùng phương pháp ma trận và phần mềm Mathcad để thiết lập và giải các phương trình cân bằng tĩnh học. Trong tài liệu [5], để thành lập các phương trình cân bằng, tác giả đã sử dụng các phép cộng các ma trận để thiết lập các phương trình hình chiếu và phép nhân của hai ma trận để thiết lập các phương trình mô men. Trong đó tác giả đã sử dụng ma trận 'sóng' để thực hiện phép tính tích vô hướng hai ma trận. Việc thành lập ma trận sóng này không làm tự động được do đó đây có thể là một hạn chế trong phương pháp này. Hay theo [6], các tác giả đã thiết lập các phương trình cân bằng, bằng phương pháp giải tích và chỉ dùng phương pháp ma trận để

giải các phương trình này. Việc này chưa giải quyết được hoàn toàn bằng phương pháp ma trận. Ngoài ra các số hạng của ma trận phải nhập lại khi giải nên làm tăng khối lượng công việc. Áp dụng phương pháp pháp ma trận để giải các bài toán kỹ thuật đặc biệt là trong lĩnh vực cơ học đã được nhiều tác giả thực hiện [8] – [13]. Ngoài ra để thực hiện các phép toán ma trận được dễ dàng nhiều nhà nghiên cứu đã ứng dụng phần mềm Matlab [7], [14] – [16]. Đây là một phần mềm tính toán mạnh và đã được thương mại.

Trên cơ sở các hạn chế của phương pháp giải tích và phương pháp ma trận trong các tài liệu tham khảo, bài báo đề xuất một cách giải khác, kết hợp với phần mềm Matlab nhằm khắc phục những hạn chế trên. Ngoài ra nhóm tác giả cũng học hỏi thêm được một cách giải mới cho các bài toán cân bằng tĩnh học, làm tiền đề thiết lập cách giải mới này cho các bài toán động học và động lực học.

2. Biểu diễn các phương trình cân bằng tĩnh học dưới dạng ma trận

Điều kiện cân bằng của một vật rắn dưới tác dụng của một hệ lực là véc tơ chính và mô men chính của hệ lực đối với một điểm bất kỳ phải triệt tiêu.

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n) \equiv \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{R} = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_O = \sum_{k=1}^n \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_k) = \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \wedge (\mathbf{F}_k) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (1)$$

Chiếu điều kiện (1) lên ba trục tọa độ vuông góc, ta được 6 phương trình cân bằng:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \\ \sum_{k=1}^n m_x(\mathbf{F}_k) &= \sum_{k=1}^n (y_k F_{kz} - z_k F_{ky}) = 0; \\ \sum_{k=1}^n m_y(\mathbf{F}_k) &= \sum_{k=1}^n (z_k F_{kx} - x_k F_{kz}) = 0; \\ \sum_{k=1}^n m_z(\mathbf{F}_k) &= \sum_{k=1}^n (x_k F_{ky} - y_k F_{kx}) = 0; \end{aligned} \quad (2)$$

Trong đó: x_k, y_k, z_k là tọa độ của điểm đặt lực $\mathbf{F}_k$; F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} , lần lượt là hình chiếu của lực $\mathbf{F}_k$ trên các trục Ox, Oy, Oz . $\mathbf{r}_k(x_k, y_k, z_k)$ là véc tơ định vị của các điểm đặt lực.

Biểu diễn (2) dưới dạng ma trận:

a. Biểu diễn véc tơ bằng ma trận và chuyển một số phép tính véc tơ sang phép tính ma trận.

- Véc tơ của các lực: $\mathbf{F}_k(F_{kx}, F_{ky}, F_{kz}) \Leftrightarrow \mathbf{F}_k = [F_{kx} \ F_{ky} \ F_{kz}]'$, ở đây dấu “'” biểu thị cho ma trận chuyển vị.

- Chuyển một số phép tính véc tơ sang phép tính ma trận

+ Phép cộng véc tơ

$$\mathbf{F}_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}; \quad \mathbf{F}_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}; \quad \mathbf{F}_z = \sum_{k=1}^n F_{kz}; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \sum F_{kx} \\ \sum F_{ky} \\ \sum F_{kz} \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

+ Tích có hướng của hai véc tơ

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} yF_z - zF_y \\ zF_x - xF_z \\ xF_y - yF_x \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

Trong đó: x, y, z là tọa độ của $\mathbf{r}$; F_x, F_y, F_z lần lượt là hình chiếu của lực $\mathbf{F}$ trên các trục Ox, Oy, Oz . $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ là các véc tơ đơn vị theo hướng của các trục Ox, Oy, Oz .

b. Biểu diễn các phương trình cân bằng dưới dạng ma trận.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \sum F_{kx} \\ \sum F_{ky} \\ \sum F_{kz} \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

$$\mathbf{M}_O = \sum_{k=1}^n \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} = \sum \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_k & y_k & z_k \\ F_{kx} & F_{ky} & F_{kz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_k F_{kz} - z_k F_{ky} \\ \sum z_k F_{kx} - x_k F_{kz} \\ \sum x_k F_{ky} - y_k F_{kx} \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

Như vậy ta nhận được 6 phương trình cân bằng dưới dạng ma trận.

* Các bước giải bài toán:

- Khảo sát cân bằng của vật rắn, hệ vật rắn và xác định các lực tác dụng vào vật rắn.
- Xác định hình chiếu của các lực lên các trục tọa độ và xác định tọa độ của các điểm đặt lực này.
- Thành lập các phương trình cân bằng dưới dạng ma trận.
- Giải các phương trình cân bằng

Để giải bài toán này bằng phần mềm Matlab ta có thể làm như sau:

% Ví dụ 1

% Tìm hình chiếu của các véc tơ lực trên các trục tọa độ

$\mathbf{F}_k = [F_{kx}; F_{ky}; F_{kz}]$

% Xác định tọa độ của các điểm đặt lực

$\mathbf{r}_k = [x_k; y_k; z_k]$

% Thành lập các phương trình cân bằng

$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_k = [\sum F_{kx}; \sum F_{ky}; \sum F_{kz}]$;

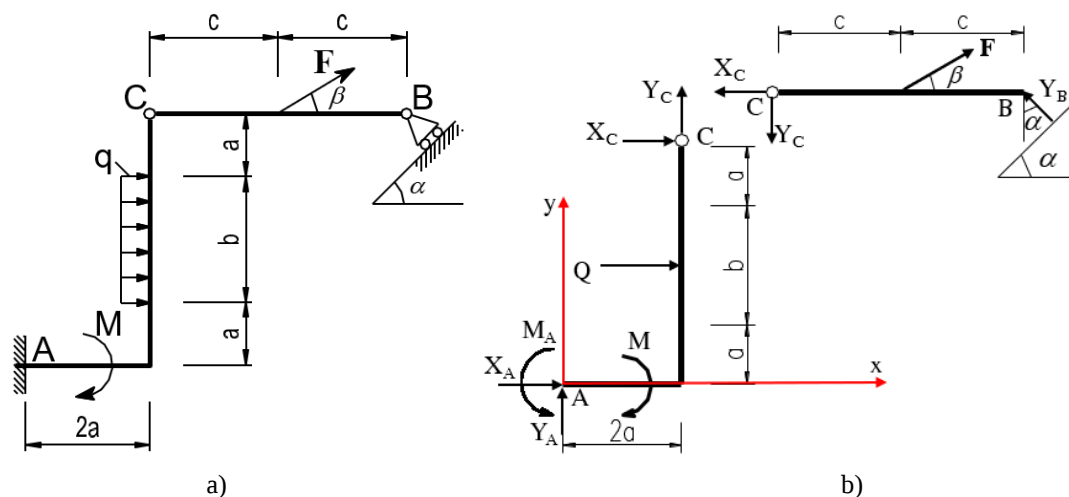
$\mathbf{M} = \sum (\mathbf{r}_k \wedge \mathbf{F}_k) = \sum (\text{cross}(\mathbf{r}_k, \mathbf{F}_k))$;

% Giải các phương trình cân bằng

$[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6] = \text{solve}(F(1), F(2), F(3), M(1), M(2), M(3))$

Để minh họa hiệu quả của phương pháp ma trận giải các bài toán cân bằng tĩnh học so với phương pháp giải tích và các phương pháp ma trận khác, bài báo đưa ra bốn ví dụ khác nhau.

3. Ví dụ áp dụng



Hình 1. Hình vẽ của ví dụ 1

Ví dụ 1: Xác định phản lực tại A và B của hệ như hình 1a. Cho $a=1\text{m}$, $b=2\text{m}$, $c=3\text{m}$; $F=10\text{kN}$, $M=1\text{kN.m}$, $q=2\text{kN/m}$; góc $\beta=30^\circ$, $\alpha=45^\circ$

Bài giải: *Cách 1*, giải theo phương pháp giải tích thông thường

Tách hệ thành hai thanh AC và CB. Xét cân bằng riêng từng thanh. Thay thế các liên kết bằng các phản lực liên kết tương ứng và thay hệ lực phân bố q bằng lực tập trung $Q = q.b = 2.2 = 4\text{kN}$, như hình 1b.

- Xét cân bằng thanh CB

$$\sum F_{kx} = -X_C + F.\cos\beta - Y_B.\sin\alpha = 0$$

$$\sum F_{ky} = -Y_C + F.\sin\beta + Y_B.\cos\alpha = 0$$

$$\sum M_C = F.\sin\beta.c + Y_B.\cos\alpha.2c = 0;$$

- Xét cân bằng thanh AC

$$\sum F_{kx} = X_A + Q + X_C = 0$$

$$\sum F_{ky} = Y_A + Y_C = 0$$

$$\sum M_A = M_A - M - Q(b/2+a) - X_C.(2a+b) + Y_C.2a = 0$$

Giải hệ sáu phương trình trên, với $a=1\text{m}$, $b=2\text{m}$, $c=3\text{m}$; $F=10\text{kN}$, $M=1\text{kN.m}$, $q=2\text{kN/m}$; $\beta=30^\circ$, $\alpha=45^\circ$ ta được:

$$X_A = -15,16 \text{ kN}; Y_A = -2,5 \text{ kN}; M_A = 48,64 \text{ kN}; Y_B = -3,54 \text{ kN}.$$

Cách 2, giải theo phương pháp ma trận

%Tìm hình chiếu của các véc tơ lực trên các trục tọa độ

$$\text{Đặt: } \cos_b = \sqrt{3}/2; \sin_b = 1/2; \cos_a = \sqrt{2}/2; \sin_a = \sqrt{2}/2.$$

$$\mathbf{R}_a = [x_a; y_a; 0]; \mathbf{Q}_1 = [Q; 0; 0]; \mathbf{F}_1 = [F.\cos_b; F.\sin_b; 0]; \mathbf{R}_b = [-y_b.\sin_a; y_b.\cos_a; 0];$$

$$\mathbf{R}_c = [x_c; y_c; 0]; \mathbf{R}_{c1} = [-x_c; -y_c; 0];$$

%Toa do cac diem dat luc:

$$\mathbf{r}_A = [0; 0; 0]; \mathbf{r}_Q = [2*a; a+b/2; 0]; \mathbf{r}_F = [2*a+c; 2*a+b; 0]; \mathbf{r}_B = [2*a+2*c; 2*a+b; 0];$$

$$\mathbf{r}_C = [2*a; 2*a+b; 0].$$

%Các phương trình cân bằng:

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}_a + \mathbf{Q}_1 + \mathbf{R}_c;$$

$$\mathbf{P1} = \mathbf{R}_{c1} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_b;$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_A \wedge \mathbf{R}_a + \mathbf{r}_C \wedge \mathbf{R}_c + \mathbf{r}_Q \wedge \mathbf{Q}_1;$$

$$\mathbf{M1} = \mathbf{r}_C \wedge \mathbf{R}_{c1} + \mathbf{r}_B \wedge \mathbf{R}_b + \mathbf{r}_P \wedge \mathbf{P};$$

$$\mathbf{M2} = \mathbf{M}(3) - \mathbf{M} + \mathbf{M}_a;$$

%Giải các phương trình cân bằng

$$[x_a \ x_b \ y_b \ x_c \ x_c \ M_a] = \text{solve}(\mathbf{P}(1), \mathbf{P}(2), \mathbf{P1}(1), \mathbf{P1}(2), \mathbf{M1}(3), \mathbf{M2})$$

%Kết quả : -15,16 ; -2,5 ; -3,54 ; 11,16 ; 2,5 ; 48,64.

Nhận xét: qua ví dụ trên ta thấy, giải theo cách 2 có ưu điểm hơn so với cách 1 là:

- Việc thiết lập các phương trình mô men đơn giản hơn, do các phương trình này được thiết lập bằng các phần mềm toán;

- Giải các phương trình đã được đơn giản hóa;

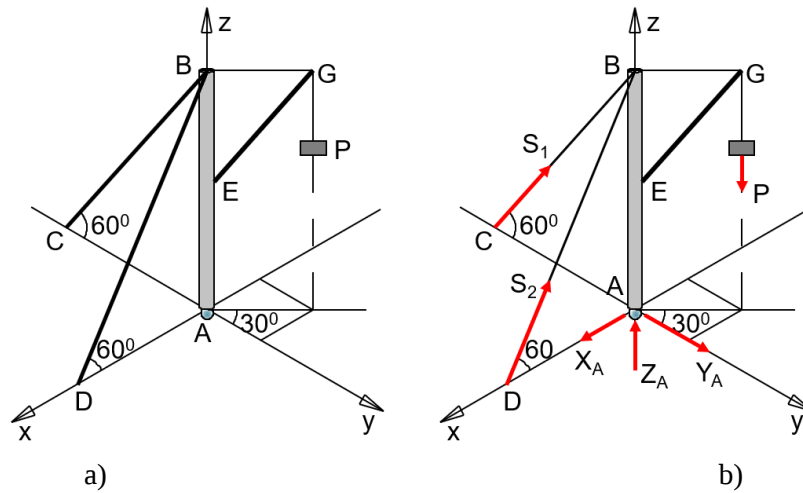
- Kết quả được tính toán chính xác và nhanh hơn.

Mặc dù đây chỉ mới là một bài toán phẳng, tuy nhiên chúng ta thấy việc giải bài toán trên bằng phương pháp ma trận có ưu điểm hơn so với phương pháp giải tích.

Ví dụ 2: Cột $AB=2a$ được giữ ở vị trí thẳng đứng nhờ gối cầu A và hai thanh không trọng lượng BC và BD (hình 2a). Tại G treo vật có trọng lượng P liên kết với cột nhờ dây BG=a và thanh EG. Điểm E ở giữa AB, các thanh BC và BD nghiêng với trục Ax, Ay góc 60° . Tính các thành phần phản lực tại A và các phản lực trong các thanh BC, BD.

Bài giải: *Cách 1*, giải theo phương pháp ma trận trong [5]

Khảo sát cột AB cân bằng dưới tác dụng của hệ lực ($S_1, S_2, X_A, Y_A, Z_A, P$).



Hình 2. Hình vẽ của ví dụ 2

Hình chiếu của các lực lên các trục tọa độ và tọa độ các điểm đặt lực tương ứng được xác định như sau:

$$\mathbf{R}_A = [X_A; Y_A; Z_A]; \mathbf{S}_{11} = [0; 0,5S_1; 0,5\sqrt{3}S_1]; \mathbf{S}_{22} = [-0,5S_2; 0; 0,5\sqrt{3}S_2]; \mathbf{P}_1 = [0; 0; -P];$$

$$\mathbf{r}_A = [0; 0; 0]; \mathbf{r}_C = [0; -2a\sqrt{3}/3; 0]; \mathbf{r}_D = [2a\sqrt{3}/3; 0; 0]; \mathbf{r}_P = [-a/2; a\sqrt{3}/2; 2a];$$

Để thực hiện các phép tính tích có hướng của hai véc tơ, tác giả đã đưa vào ma trận sóng (ma trận phản đối xứng) ứng với các véc tơ tọa độ của các điểm đặt lực.

$$\tilde{\mathbf{r}}_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2a\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2a\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}; \tilde{\mathbf{r}}_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2a\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 2a\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{bmatrix}; \tilde{\mathbf{r}}_P = \begin{bmatrix} 0 & -2a & \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ 2a & 0 & 0,5a \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}a & -0,5a & 0 \end{bmatrix}$$

Các phương trình cân bằng được viết như sau:

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_A + \mathbf{S}_{11} + \mathbf{S}_{22} + \mathbf{P}_1; \mathbf{B} = \tilde{\mathbf{r}}_C \cdot \mathbf{S}_{11} + \tilde{\mathbf{r}}_D \cdot \mathbf{S}_{22} + \tilde{\mathbf{r}}_P \cdot \mathbf{P}_1$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} X_A - 0,5S_2 \\ Y_A + 0,5S_1 \\ Z_A + 0,5\sqrt{3}S_1 + 0,5\sqrt{3}S_2 - P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -aS_1 - 0,5aP\sqrt{3} \\ -aS_2 - 0,5P \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hệ trên có 5 phương trình 5 ẩn số ta dễ dàng giải để tìm năm ẩn số bằng các phần mềm chuyên dụng.

Cách 2, giải theo phương pháp ma trận của bài báo

- Ta cũng tìm hình chiếu của các lực

$$\mathbf{R}_A = [X_A; Y_A; Z_A]; \mathbf{R}_C = [0; S_1\cos 60^\circ; S_1\sin 60^\circ]; \mathbf{R}_D = [-S_2\cos 60^\circ; 0; S_2\sin 60^\circ]; \mathbf{P}_1 = [0; 0; -P];$$

- Tọa độ của các điểm đặt lực:

$$\mathbf{r}_A = [0; 0; 0]; \mathbf{r}_C = [0; -2a\sqrt{3}/3; 0]; \mathbf{r}_D = [2a\sqrt{3}/3; 0; 0]; \mathbf{r}_P = [-a/2; a\sqrt{3}/2; 2a];$$

Tuy nhiên ở đây để tính các tích có hướng của các ma trận ta không cần lập các ma trận sóng mà tính trực tiếp các tích này luôn.

- Các phương trình cân bằng:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_C + \mathbf{R}_D + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_A \wedge \mathbf{R}_A + \mathbf{r}_C \wedge \mathbf{R}_C + \mathbf{r}_D \wedge \mathbf{R}_D + \mathbf{r}_P \wedge \mathbf{P}$$

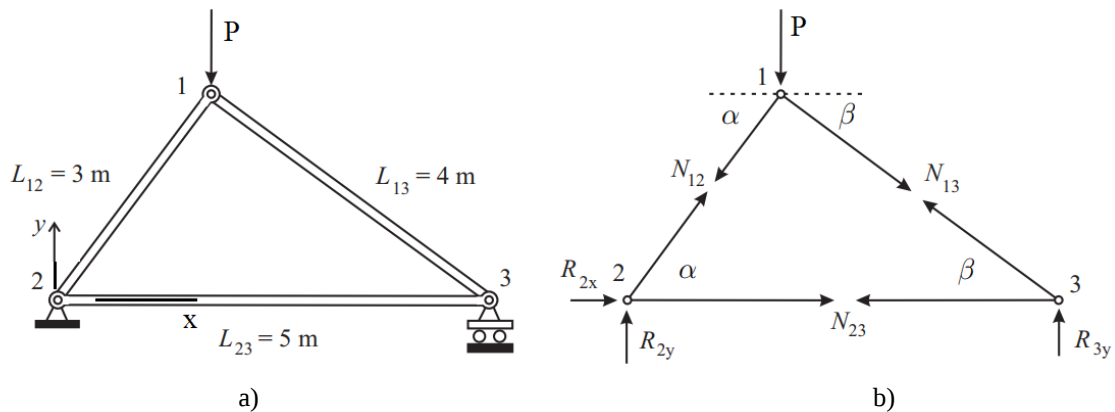
$$\mathbf{F} =$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} Xa-1/2*S2 \\ Ya+1/2*S1 \\ Za+1/2*S1*3^{1/2}+1/2*S2*3^{1/2}-P \end{bmatrix} \\
 & \mathbf{M} = \begin{bmatrix} -a*S1-1/2*a*3^{1/2}*P \\ -a*S2-1/2*a*P \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Các phương trình cân bằng giống hoàn toàn so với cách 1

Nhận xét: Qua ví dụ 2 này ta thấy sử dụng phương pháp ma trận rõ ràng là có hiệu quả hơn phương pháp giải tích trong việc thiết lập và giải các bài toán không gian. Ta cũng thấy phương pháp trong bài báo có ưu điểm hơn so với phương pháp trong [5] là không cần phải lập ma trận 'sóng' để thiết lập các phương trình cân bằng mô men.

Ví dụ 3: Cho giàn phẳng 3 thanh được xác định như hình 3a. Giàn chịu tải trọng thẳng đứng P có giá trị 1000 N tại nút 1. Hãy xác định nội lực trong các thanh (N_{12} , N_{13} , N_{23}) và các phản lực (R_{2x} , R_{2y} , R_{3y}) [6].



Hình 3. Hình vẽ của ví dụ 3

Bài giải: Cách 1, giải theo [6]

Tách dần thành các nút như hình 3b. Viết phương trình cân bằng tại các nút ta được

$$\begin{aligned}
 \text{Nút 1:} \quad & -N_{12} \cos \alpha + N_{13} \cos \beta = 0 \\
 & -N_{12} \sin \alpha - N_{13} \sin \beta - 1000 = 0 \\
 \text{Nút 2:} \quad & N_{12} \cos \alpha + N_{23} + R_{2x} = 0 \\
 & N_{12} \sin \alpha + R_{2y} = 0 \\
 \text{Nút 3:} \quad & -N_{23} - N_{13} \cos \beta = 0 \\
 & N_{13} \sin \beta + R_{3y} = 0
 \end{aligned}$$

Đây là hệ phương trình tuyến tính có 6 phương trình và sáu ẩn số, được viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{bmatrix} -\cos \alpha & 0 & \cos \beta & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & -\sin \beta & 0 & 0 & 0 \\ \cos \alpha & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\cos \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \beta & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_A \cdot \begin{bmatrix} N_{12} \\ N_{23} \\ N_{13} \\ R_{2x} \\ R_{2y} \\ R_{3y} \end{bmatrix}_X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_B$$

Dùng phần mềm Matlab ta dễ dàng xác định được các ẩn: $\mathbf{X} = \mathbf{A} \backslash \mathbf{B}$

Cách 2, giải theo phương pháp ma trận của bài báo

- Xác định chiều của các lực:

$$\mathbf{R}_2 = [R_{2x}; R_{2y}]; \mathbf{R}_3 = [0; R_{3y}]; \mathbf{N}_{1,2} = [-N_{12}\cos\alpha; -N_{12}\sin\alpha];$$

$$\mathbf{N}_{2,3} = [N_{23}; 0]; \mathbf{N}_{1,3} = [N_{13}\cos\beta; -N_{13}\sin\beta]; \mathbf{P}_1 = [0; -P];$$

Các phương trình cân bằng:

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{N}_{1,2} + \mathbf{N}_{1,3} + \mathbf{P}_1;$$

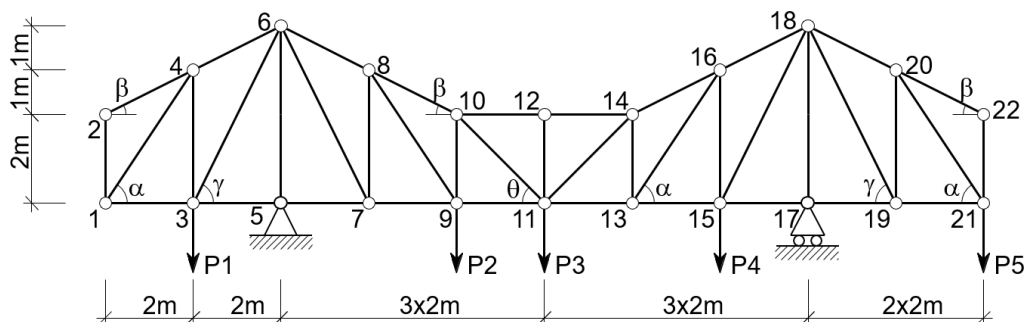
$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{R}_2 - \mathbf{N}_{1,2} + \mathbf{N}_{2,3};$$

$$\mathbf{F}_3 = -\mathbf{N}_{2,3} + \mathbf{R}_3 - \mathbf{N}_{1,3};$$

Từ các phương trình cân bằng này, dùng phần mềm Matlab ta cũng dễ dàng xác định được các ẩn số.

Nhận xét: Theo cách 1, mặc dù việc tìm ra các ẩn tương đối dễ dàng nhưng ta phải viết lại các ma trận một cách bị động dựa vào các phương trình cân bằng được viết dưới dạng giải tích. Theo cách 2, từ các phương trình cân bằng, ta hoàn toàn có thể tìm được các ẩn bằng Matlab mà không cần phải viết lại các ma trận. Điều này giúp giảm các sai sót và tính toán nhanh hơn.

Ví dụ 4: Cho giàn phẳng có 41 thanh xác định như hình 4. Giàn chịu tải trọng thẳng đứng $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 1000\text{N}$, $P_5 = 3000\text{N}$ tại các nút 3, 9, 11, 15, 21. Hãy xác định nội lực trong tất cả các thanh và các phản lực tại các nút 5 và 17. Và hãy xác định nội lực trong các thanh khi P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 đặt tương ứng tại các nút 1, 7, 11, 17, 19.



Hình 4. Hình vẽ của ví dụ 4

Giải, giải theo phương pháp ma trận

$$\cos\alpha = 1/\sqrt{3.25}; \sin\alpha = 1.5/\sqrt{3.25}; \cos\beta = 1/\sqrt{1.25}; \sin\beta = 0.5/\sqrt{1.25};$$

$$\cos\gamma = 1/\sqrt{5}; \sin\gamma = 2/\sqrt{5}; \cos\theta = 1/\sqrt{2}; \sin\theta = 1/\sqrt{2};$$

- Xác định chiều của các lực:

$$\mathbf{N}_{1,2} = [0; N_{12}]; \mathbf{N}_{1,3} = [N_{13}; 0]; \mathbf{N}_{1,4} = [N_{14}\cos\alpha; N_{14}\sin\alpha];$$

$$\mathbf{N}_{2,4} = [N_{24}\cos\beta; N_{24}\sin\beta]; \mathbf{N}_{2,1} = -\mathbf{N}_{1,2};$$

$$\mathbf{N}_{3,1} = -\mathbf{N}_{1,3}; \mathbf{N}_{3,4} = [0; N_{34}]; \mathbf{N}_{3,5} = [N_{35}; 0]; \mathbf{N}_{3,6} = [N_{36}\cos\gamma; N_{36}\sin\gamma]; \mathbf{P}_1 = [0; -p_1];$$

$$\mathbf{N}_{4,1} = -\mathbf{N}_{1,4}; \mathbf{N}_{4,2} = -\mathbf{N}_{2,4}; \mathbf{N}_{4,3} = -\mathbf{N}_{3,4}; \mathbf{N}_{4,6} = [N_{46}\cos\beta; N_{46}\sin\beta];$$

$$\mathbf{N}_{5,3} = -\mathbf{N}_{3,5}; \mathbf{N}_{5,6} = [0; N_{56}]; \mathbf{N}_{5,7} = [N_{57}; 0]; \mathbf{R}_5 = [R_{5x}; R_{5y}];$$

$$\mathbf{N}_{6,3} = -\mathbf{N}_{3,6}; \mathbf{N}_{6,4} = -\mathbf{N}_{4,6}; \mathbf{N}_{6,5} = -\mathbf{N}_{5,6}; \mathbf{N}_{6,7} = [N_{67}\cos\gamma; -N_{67}\sin\gamma]; \mathbf{N}_{6,8} = [N_{68}\cos\beta; -N_{68}\sin\beta];$$

$$\mathbf{N}_{7,5} = -\mathbf{N}_{5,7}; \mathbf{N}_{7,6} = -\mathbf{N}_{6,7}; \mathbf{N}_{7,8} = [0; N_{78}]; \mathbf{N}_{7,9} = [N_{79}; 0];$$

$$\mathbf{N}_{8,6} = -\mathbf{N}_{6,8}; \mathbf{N}_{8,7} = -\mathbf{N}_{7,8}; \mathbf{N}_{8,9} = [N_{89}\cos\alpha; -N_{89}\sin\alpha]; \mathbf{N}_{8,10} = [N_{810}\cos\beta; -N_{810}\sin\beta];$$

$$\mathbf{N}_{9,7} = -\mathbf{N}_{7,9}; \mathbf{N}_{9,8} = -\mathbf{N}_{8,9}; \mathbf{N}_{9,10} = [0; N_{910}]; \mathbf{N}_{9,11} = [N_{911}; 0]; \mathbf{P}_2 = [0; -p_2];$$

$$\mathbf{N}_{10,8} = -\mathbf{N}_{8,10}; \mathbf{N}_{10,9} = -\mathbf{N}_{9,10}; \mathbf{N}_{10,11} = [N_{1011}\cos\theta; -N_{1011}\sin\theta]; \mathbf{N}_{10,12} = [N_{1012}; 0];$$

$$\mathbf{N}_{11,9} = -\mathbf{N}_{9,11}; \mathbf{N}_{11,10} = -\mathbf{N}_{10,11}; \mathbf{N}_{11,12} = [0; N_{1112}]; \mathbf{N}_{11,14} = [N_{1114}\cos\theta; N_{1114}\sin\theta];$$

$$\mathbf{N}_{11,13} = [N_{1113}; 0]; \mathbf{P}_3 = [0; -p_3];$$

$$\mathbf{N}_{12,10} = -\mathbf{N}_{10,12}; \mathbf{N}_{12,11} = -\mathbf{N}_{11,12}; \mathbf{N}_{12,14} = [N_{1214}; 0];$$

$$\mathbf{N}_{13,11} = -\mathbf{N}_{11,13}; \mathbf{N}_{13,14} = [0; N_{1314}]; \mathbf{N}_{13,15} = [N_{1315}; 0]; \mathbf{N}_{13,16} = [N_{1316}\cos\alpha; N_{1316}\sin\alpha];$$

$$\mathbf{N}_{14,12} = -\mathbf{N}_{12,14}; \mathbf{N}_{14,11} = -\mathbf{N}_{11,14}; \mathbf{N}_{14,13} = -\mathbf{N}_{13,14}; \mathbf{N}_{14,16} = [N_{1416}\cos\beta; N_{1416}\sin\beta];$$

$$\mathbf{N}_{15,13} = -\mathbf{N}_{13,15}; \mathbf{N}_{15,16} = [0; N_{1516}]; \mathbf{N}_{15,17} = [N_{1517}; 0]; \mathbf{N}_{15,18} = [N_{1518}\cos\gamma; N_{1518}\sin\gamma]; \mathbf{P}_4 = [0; -p_4];$$

$$\mathbf{N}_{16,14} = -\mathbf{N}_{14,16}; \mathbf{N}_{16,13} = -\mathbf{N}_{13,16}; \mathbf{N}_{16,15} = -\mathbf{N}_{15,16}; \mathbf{N}_{16,18} = [N_{1618}\cos\beta; N_{1618}\sin\beta];$$

$$\begin{aligned}
N_{17,15} &= -N_{15,17}; N_{17,18} = [0; N_{17,18}]; N_{17,19} = [N_{17,19}; 0]; R17=[0; R17y]; \\
N_{18,16} &= -N_{16,18}; N_{18,15} = -N_{15,18}; N_{18,17} = -N_{17,18}; N_{18,19} = [N_{18,19}\cos\gamma; -N_{18,19}\sin\gamma]; N_{18,20} = \\
&[N_{18,20}\cos\beta; -N_{18,20}\sin\beta]; \\
N_{19,17} &= -N_{17,19}; N_{19,18} = -N_{18,19}; N_{19,20} = [0; N_{19,20}]; N_{19,21} = [N_{19,21}; 0]; \\
N_{20,18} &= -N_{18,20}; N_{20,19} = -N_{19,20}; N_{20,21} = [N_{20,21}\cos\alpha; -N_{20,21}\sin\alpha]; N_{20,22} = [N_{20,22}\cos\beta; - \\
&N_{20,22}\sin\beta];
\end{aligned}$$

$$N_{21,19} = -N_{19,21}; N_{21,20} = -N_{20,21}; N_{21,22} = [0; N_{21,22}];$$

$$N_{22,20} = -N_{20,22}; N_{22,21} = -N_{21,22};$$

Các phương trình cân bằng:

$$F1 = N_{1,2} + N_{1,3} + N_{1,4};$$

$$F2 = N_{2,1} + N_{2,4};$$

$$F3 = N_{3,1} + N_{3,4} + N_{3,5} + N_{3,6} + P1;$$

$$F4 = N_{4,1} + N_{4,2} + N_{4,3} + N_{4,6};$$

$$F5 = N_{5,3} + N_{5,6} + N_{5,7} + R5;$$

$$\dots\dots\dots$$

$$F22 = N_{22,20} + N_{22,21};$$

Kết quả: $N_{1,2}, N_{1,3}, N_{1,4}, N_{2,4}, N_{3,4}, N_{3,5}, N_{3,6}, N_{4,6}, N_{5,6}, N_{5,7}, N_{6,7}, N_{6,8}, N_{7,8}, N_{7,9}, N_{8,9}, N_{8,10}, N_{9,10}, N_{9,11}, N_{10,11}, N_{10,12}, N_{11,12}, N_{11,13}, N_{11,14}, N_{12,14}, N_{13,14}, N_{13,15}, N_{13,16}, N_{14,16}, N_{15,16}, N_{15,17}, N_{15,18}, N_{16,18}, N_{17,18}, N_{17,19}, N_{18,19}, N_{18,20}, N_{19,20}, N_{19,21}, N_{20,21}, N_{20,22}, N_{21,22}, R5x, R5y, R17y.$

0	0	0	0	0	-500.0	1118.0	0.0	-1500.0	-500.0	372.7	372.7
-333.3	-333.3	600.9	0.0	500.0	0	-707.1	500.0	0	-2000.0	2121.3	500.0
-500.0	-2333.3	600.9	2236.1	-333.3	-3000.0	1490.7	2608.8	-5500.0	-3000.0	2236.1	2236.1
-2000.0	-2000.0	3605.6	0	0	0	1500.0	5500.0				

Khi các lực P_i thay đổi vị trí đến các nút 1, 7, 11, 17, 19. Bằng cách thay đổi vị trí của P_i trong đoạn chương trình của phần mềm ta được kết quả tương ứng là:

0	-666.7	1201.9	0	-666.7	-1000.0	745.4	745.4	-2166.7	-1000.0	993.8	621.1
111.1	-555.6	-200.3	745.4	166.7	-666.7	235.7	500.0	0	-1333.3	1178.5	500.0
-166.7	-1444.4	200.3	1490.7	-111.1	-1500.0	124.2	1614.9	-3833.3	-1500.0	3354.1	0
0	0	0	0	0	0	2166.7	4833.3				

Một số giá trị của nội lực thanh đã được kiểm tra lại bằng phương pháp giải tích và thấy trùng với các kết quả trên.

Nhận xét: Ví dụ 4 có 44 ẩn số bao gồm nội lực của 41 thanh dàn và 3 phản lực, để tìm tất cả 44 ẩn số này ta phải lập 22 phương trình cân bằng. Nếu thiết lập và giải các phương trình này bằng phương pháp giải tích rõ ràng là rất khó khăn và sẽ dẫn đến các sai sót do tính toán nhiều và các ẩn số có mối liên hệ với nhau, nếu một kết quả trước sai dẫn đến sai dây chuyền. Chưa kể khi có yêu cầu thay đổi vị trí của các ngoại lực P_i (xét trường hợp có tải trọng di động) ta phải tính toán lại từ đầu. Trong khi dùng phương pháp ma trận kết hợp với phần mềm Matlab giúp ta thực hiện các việc này một cách dễ dàng.

4. Kết luận

Trong bài báo đã trình bày cách giải các bài toán cân bằng tĩnh học, bằng cách thiết lập các phương trình dưới dạng ma trận. Qua bốn ví dụ cụ thể ta thấy, việc giải các bài toán theo phương pháp ma trận và sử dụng các phần mềm chuyên dụng giúp ta tính toán nhanh và chính xác hơn. Ngoài ra, thông qua bài báo nhóm tác giả đã tiếp cận tốt hơn với các thành tựu của công nghệ thông tin, giúp cho việc học tập, nghiên cứu và làm việc hiệu quả hơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

- [1] S. Do, *Mechanics, vol. I, Statics and kinematics*, Vietnam Educational Publishing House, (in Vietnamese), 2016.
- [2] S. Do, *Mechanics, volume II, Dynamics*, Vietnam Educational Publishing House, (in Vietnamese), 2016.

-
- [3] V. K. Nguyen, *Mechanical engineering*. Volume I, Statics and kinematics, Volume II Dynamics, (in Vietnamese), Viet Nam National University Press, Ha Noi 2009.
- [4] T. Nguyen, D. D. Tong, and Y. T. H. Le, *Theoretical mechanics. Vol. 1 - Statics and Kinematics, Vol. 2 - Dynamics*, Science and Technics Publishing House, (in Vietnamese), 2006.
- [5] S. Do, *Mechanical engineering, vol. I, Statics and kinematics*, Vietnam Educational Publishing House, (in Vietnamese), 2009.
- [6] M. M. Bech *et al*, "Mathematics in engineering and science," School of Engineering and Science, Aalborg University, 2012.
- [7] H. Deng, L. Li, and X. Zhang, "Application of MATLAB in Solving Linear Equations," *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 2019, pp. 1-5.
- [8] M. J. Panza, "Application of Power Method and Dominant Eigenvector/Eigenvalue Concept for Approximate Eigenspace Solutions to Mechanical Engineering Algebraic Systems," *American Journal of Mechanical Engineering*, vol. 6, no. 3, pp. 98-113, 2018.
- [9] M. Aparna, "Applications of matrix mathematics," *International Education Research*, vol. 2, no. 12, pp. 80-82, Dec. 2016.
- [10] F. Dong and Y. Lv, "Matrix Operation and Its Application in Computer Engineering," *2018 IEEE/ACIS 17th International Conference on Computer and Information Science (ICIS)*, Singapore, 2018, pp. 604-607, doi: 10.1109/ICIS.2018.8466378.
- [11] A. Eriksson and A. Nordmark, "Constrained stability of conservative static equilibrium," *Computational Mechanics*, vol. 64, pp. 1199–1219, 2019, doi: 10.1007/s00466-019-01700-8.
- [12] S. J. Rayate, "Application Of Matrices In Engineering," *International Journal for Research in Engineering Application & Management*, Special Issue – ICRTET, pp. 320 -322, 2018.
- [13] A. A. Hadi, "Matrix Application in Engineering Problems," *The International Conference on Intelligent Systems & Networks*, 2021, pp. 589–598.
- [14] F. W. Pietryga, "Solving Differential Equations Using MATLAB/Simulink," *Proceedings of the 2005 American Society for Engineering Education Annual Conference & Exposition*, 2005, pp. 10.1128.1 - 10.1128.11.
- [15] I. C. Tomozei, T. Axinte, and L. Paraschiv, "A brief introduction to the Matlab program," *Technium Romanian Journal of Applied Sciences and Technology*, vol. 9, no. 3, pp. 54-59, 2023.
- [16] S. Chi, "Application of MATLAB Parallel Programming Technology," *Applied Mechanics and Materials*, vol. 602-605, pp. 3787 – 3790, August 2014.