WEIGHTED COMPLEX *m*-HESSIAN EQUATION

Nguyen Van Phu
Electric Power University

ARTICLE INFO

Received: 26/01/2024
Revised: 23/02/2024
Published: 23/02/2024

KEYWORDS

m-subharmonic functions
m-polar sets
Complex *m*-Hessian operator
Complex *m*-Hessian equation
m-hyperconvex domain

ABSTRACT

Solving *m*-Hessian equations is an important problem in the theory of *m*-subharmonic functions. Recently, many authors have been interested in solving weighted m-Hessian equations $-F(u,z)H_m(u)=\mu$ in the case when $F(t,z)$ is a non-decreasing function in the first variable and μ is a measure that puts no mass on all *m*-polar sets. In this article, we study the above-mentioned problem without the monotonicity assumption on the function $F(t,z)$ in the first variable. To achieve the above result, we apply the Schauder fixed point Theorem way by creating a suitable convex compact set and constructing a continuous map from the aforementioned convex compact set into itself. The techniques for solving weighted m-Hessian equations without the monotonicity assumption on the function $F(t,z)$ in the first variable are quite different from those used in the case with the monotonicity assumption on the function $F(t,z)$ in the first variable. We also solve the above-mentioned weighted *m*-Hessian equation in the case where the measure μ is bounded by a suitable function of the *m*-capacity and provide an example of a measure μ that satisfies this assumption.

PHƯƠNG TRÌNH *m*-HESSIAN PHỨC CÓ TRỌNG

Nguyễn Văn Phú
Trường Đại học Điện lực

THÔNG TIN BÀI BÁO

Ngày nhận bài: 26/01/2024
Ngày hoàn thiện: 23/02/2024
Ngày đăng: 23/02/2024

TỪ KHÓA

Hàm *m*-điều hòa dưới
Các tập *m*-cực
Toán tử *m*-Hessian phức
Phương trình *m*-Hessian phức
Miền *m*-siêu lồi

TÓM TẮT

Giải phương trình *m*-Hessian là bài toán quan trọng trong lý thuyết về các hàm *m*-điều hòa dưới. Gần đây, nhiều tác giả quan tâm giải phương trình *m*-Hessian có trọng $-F(u,z)H_m(u)=\mu$ khi $F(t,z)$ là một hàm đơn điệu không giảm theo biến thứ nhất và μ là độ đo triệt tiêu trên các tập *m*-cực. Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu bài toán giải phương trình *m*-Hessian có trọng ở trên mà không cần giả thiết đơn điệu của hàm $F(t,z)$ theo biến thứ nhất. Để đạt được kết quả trên, chúng tôi áp dụng Định lý điểm bất động Schauder bằng cách tạo ra một tập lồi, compact thích hợp và xây dựng một ánh xạ liên tục từ tập lồi compact được đề cập ở trên vào chính nó. Kỹ thuật để giải phương trình *m*-Hessian có trọng trong trường hợp không cần giả thiết hàm $F(t,z)$ đơn điệu theo biến thứ nhất là rất khác biệt với các kĩ thuật được dùng trong trường hợp có giả thiết hàm $F(t,z)$ đơn điệu theo biến thứ nhất. Chúng tôi cũng giải phương trình *m*-Hessian có trọng ở trên trong trường hợp độ đo μ bị chặn bởi một hàm thích hợp của *m*-dung lượng và đưa ra một ví dụ về độ đo μ thỏa mãn giả thiết đó.

DOI: https://doi.org/10.34238/tnu-jst.9645

Email: phunv@epu.edu.vn

1. Đặt vấn đề

Toán tử Monge-Ampère phức $(dd^c u)^n$ đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết đa thế vị. Trong [1] E. Bedford and B. A. Taylor định nghĩa toán tử Monge-Ampère trên lớp các hàm đa điều hòa dưới bị chặn địa phương và chỉ ra tính liên tục của nó trên các dãy giảm các hàm đa điều hoà dưới bị chặn địa phương. Sau đó trong [2], [3], U. Cegrell giới thiệu lớp các hàm $\mathcal{F}(\Omega)$ và $\mathcal{E}(\Omega)$ không nhất thiết bị chặn địa phương mà trên đó toán tử Monge-Ampère vẫn xác định. Giải phương trình Monge-Ampère $(dd^c u)^n = \mu$ và các phương trình dạng Monge-Ampère là bài toán được nhiều nhà Toán học nghiên cứu (xem [4]-[7]).

Trong [8] Z. Blocki giới thiệu lớp hàm *m*-điều hoà dưới là sự mở rộng của lớp hàm đa điều hoà dưới và nghiên cứu toán tử *m*-Hessian phức $H_m(u) = (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}$ trên lớp các hàm *m*-điều hoà dưới bị chặn địa phương và chỉ ra tính liên tục của nó trên các dãy giảm các hàm *m*-điều hoà dưới bị chặn địa phương. Trong bài báo [9] Lữ Hoàng Chinh giới thiệu lớp Cegrell $\mathcal{F}_m(\Omega), \mathcal{E}_m(\Omega)$ các hàm *m*-điều hoà dưới không nhất thiết bị chặn địa phương mà toán tử *m*-Hessian phức xác định và liên tục dưới dãy giảm. Trong lý thuyết về các hàm *m*-điều hòa dưới, việc giải phương trình *m*-Hessian phức đóng vai trò quan trọng. Trong [10] Vũ Việt Hùng và Nguyễn Văn Phú đã giải phương trình *m*-Hessian phức $H_m(u) = \mu$ trong lớp $\mathcal{E}_m(\Omega)$ khi tồn tại dưới nghiệm trong lớp này. Trong [11] A. El. Gasmi giải phương trình trên trong lớp $\mathcal{N}_m(f)$ nếu tồn tại dưới nghiệm trong lớp này. Trong [12], Lê Mậu Hải và Vũ Văn Quân giải phương trình dạng *m*-Hessian phức $F(u,z)H_m(u) = \mu$ trong lớp $\mathcal{D}_m(\Omega)$ nếu tồn tại dưới nghiệm trong lớp này. Gần đây, H. Amal, S. Asserda và A. El. Gasmi [13] đã giải phương trình dạng *m*-Hessian phức ở trên trong lớp $\mathcal{N}_m(f)$ nếu tồn tại dưới nghiệm trong lớp này. Tiếp tục hướng nghiên cứu của các tác giả trên, trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu giải phương trình *m*-Hessian có trọng $-F(u,z)H_m(u) = \mu$ trong lớp $\mathcal{F}_m(f)$ khi độ đo μ triệt tiêu trên tập *m*-cực và bị chặn bởi toán tử *m*-Hessian của một hàm thuộc lớp $F_m(f)$. Chúng tôi cũng nghiên cứu giải phương trình *m*-Hessian có trọng trong trường hợp độ đo μ bị chặn bởi một hàm của Cap_m.

2. Phương pháp nghiên cứu

Vận dụng, cải tiến các phương pháp truyền thống của lý thuyết đa thế vị cho các hàm đa điều hòa dưới để áp dụng cho các hàm *m*-điều hoà dưới.

Vận dụng sáng tạo các kỹ thuật của Giải tích hàm đặc biệt là áp dụng nguyên lý điểm bất động Schauder.

3. Kết quả và bàn luận

3.1. Các kiến thức chuẩn bị

Các kiến thức cần thiết về đa điều hòa dưới độc giả có thể tham khảo trong [14], các kiến thức cơ bản về hàm *m*-điều hòa dưới độc giả có thể tham khảo trong [9], [15]. Một tóm tắt các tính chất của hàm *m*-điều hòa dưới được sử dụng trong bài báo này, độc giả có thể tham khảo trong phần Premilinaries từ mục 2.1 đến mục 2.6 của bài báo [16].

Trong bài báo này chúng ta luôn giả thiết Ω là một miền *m*-siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$.

Bổ đề dưới đây là một kết quả độc lập rất thú vị và là công cụ quan trọng được sử dụng để chứng minh các kết quả chính của bài báo. Kết quả tương tự cho các hàm đa điều hòa dưới có thể xem trong [17].

Bổ đề 3.1. *Cho μ là một độ đo dương, có trọng hữu hạn trên Ω và triệt tiêu trên các tập con m-cực. Giả sử rằng dãy hàm $\{u_j\} \in SH_m^-(\Omega)$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

(i) $\sup_{j\geq 1} \int_\Omega -u_j d\mu < \infty.$

(ii) u_j *hội tụ hầu khắp nơi tới hàm* $u \in SH_m^-(\Omega)$ *theo* dV_{2n}.

Khi đó chúng ta có

$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega |u_j - u| d\mu = 0.$

Chứng minh:

Chúng ta chia chứng minh thành hai bước.

Bước 1. Chúng ta chứng minh

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega u_j d\mu = \int_\Omega u d\mu. \tag{1}$$

Thật vậy, từ giả thiết (i), tồn tại dãy con của dãy u_j (để đơn giản ta vẫn sử dụng kí hiệu u_j) sao cho $\lim_{j\to\infty} \int_\Omega u_j d\mu = a$.

Mặt khác theo Định lý hội tụ đơn điệu chúng ta có

$\lim_{N\to\infty} \int_\Omega \max\{u, -N\} d\mu = \int_\Omega u d\mu.$

Với $N \geq 1$ cố định cho trước nếu chúng ta có

$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega \max\{u_j, -N\} d\mu = \int_\Omega \max\{u, -N\} d\mu$

thì sử dụng quá trình lấy dãy đường chéo "diagonal process" chúng ta có đẳng thức (1). Do đó, chúng ta chỉ cần chứng minh đẳng thức (1) cho dãy u_j và u bị chặn dưới đều.

Do giả thiết $\mu(\Omega) < \infty$ và dãy u_j bị chặn dưới đều chúng ta có tập $A := \{u_j\}_{j\geq 1}$ là bị chặn trong không gian Hilbert $L^2(\Omega, \mu)$. Do đó theo Định lý Mazur, tồn tại dãy $\tilde{u}_j$ thuộc bao lồi của tập A sao cho $\tilde{u}_j$ hội tụ đến $\tilde{u}$ trong $L^2(\Omega, \mu)$. Từ đó tồn tại dãy con của dãy $\tilde{u}_j$ (để thuận tiện cho việc trình bày ta vẫn kí hiệu dãy con đó bằng kí hiệu dãy $\tilde{u}_j$) sao cho dãy $\tilde{u}_j$ hội tụ hầu khắp nơi đến $\tilde{u}$ theo $d\mu$.

Mặt khác, theo giả thiết (ii) chúng ta có $\tilde{u}_j \to u$ trong $L^2(\Omega, dV_{2n})$. Do đó

$(\sup_{k\geq j} \tilde{u}_k)^* \downarrow u$ trên Ω.

Theo Định lý hội tụ đơn điệu kết hợp với độ đo μ triệt tiêu trên các tập con *m*-cực chúng ta có

$\int_\Omega u d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega (\sup_{k\geq j} \tilde{u}_k)^* d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega (\sup_{k\geq j} \tilde{u}_k) d\mu = \int_\Omega \tilde{u} d\mu = a.$

Từ đó chúng ta có đẳng thức (1).

Bước 2.

Đặt $v_j := (\sup_{k\geq j} u_k)^*$. Khi đó $v_j \geq u_j, v_j \downarrow u$ trên Ω và $v_j \to u$ trong $L^1(\Omega, dV_{2n})$.

Theo Bước 1 chúng ta có

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega v_j d\mu = \int_\Omega u d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega u_j d\mu. \tag{2}$$

Bởi bất đẳng thức tam giác chúng ta có

$$\int_\Omega |u_j - u| d\mu \le \int_\Omega (v_j - u) d\mu + \int_\Omega (v_j - u_j) d\mu = 2\int_\Omega (v_j - u) d\mu + \int_\Omega (u - u_j) d\mu.$$

Kết hợp với đẳng thức (2) chúng ta có điều phải chứng minh.

3.2. Phương trình m-Hessian phức có trọng

Cho hàm $F : \mathbb{R}^- \times \Omega \to \mathbb{R}^-$ là hàm số liên tục và $f \in \mathcal{E}_m(\Omega) \cap MSH_m(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Trong Định lý dưới đây, chúng tôi giải phương trình *m*-Hessian phức có trọng trong trường hợp độ đo μ triệt tiêu trên các tập *m*-cực trong Ω và bị chặn bởi toán tử *m*-Hessian của một hàm thuộc lớp $\mathcal{F}_m(f)$. Chú ý rằng các kết quả về giải phương trình dạng *m*-Hessian trong [12] và [13] cần dùng giả thiết hàm F là hàm đơn điệu theo biến thứ nhất. Trong bài báo này chúng tôi giải phương trình dạng *m*-Hessian mà không cần giả thiết hàm F đơn điệu theo biến thứ nhất.

Định lý 3.1. *Cho μ là độ đo không âm, có trọng hữu hạn và triệt tiêu trên các tập con m-cực trên Ω. Nếu các điều kiện sau đây thỏa mãn:*

(i) Tồn tại hàm $\psi \in \mathcal{F}_m(f) \cap L^1(\Omega, \mu)$ sao cho $\mu \le H_m(\psi)$.

(ii) $F(t, z) \le -1$ với mọi $t < 0, z \in \Omega$.

Khi đó phương trình

$-F(u, z) H_m(u) = \mu$

có nghiệm

$u \in \mathcal{F}_m^a(f) \cap L^1(\Omega, \mu)$.

Chứng minh: Đặt

$\mathcal{A} := \{u \in \mathcal{F}_m(f) : \psi \le u \le f\}$.

Dễ thấy $\mathcal{A} \ne \emptyset$ do $\psi \in \mathcal{A}$. Từ Mệnh đề 3.3 trong [10], chúng ta suy ra rằng nếu $u \in \mathcal{F}_m(f)$ thì $u \in L^1(\Omega, dV_{2n})$. Do đó $\mathcal{A}$ là tập con lồi, compact trong $L^1(\Omega, dV_{2n})$. Theo Bổ đề 3.1, chúng ta suy ra $\mathcal{A}$ là tập compact trong $L^1(\Omega, \mu)$.

Với mỗi hàm $u \in \mathcal{A}$, chúng ta có $\dfrac{1}{-F(u,z)} d\mu$ là độ đo triệt tiêu trên các tập *m*-cực và có trọng hữu hạn. Do đó, theo Định lý 4.4 trong [11], tồn tại duy nhất hàm $v \in \mathcal{F}_m^a(f)$ là nghiệm của phương trình $H_m(v) = \dfrac{1}{-F(u,z)} d\mu$. Hơn nữa, bởi giả thiết (i) và (ii), chúng ta có $H_m(v) \le \mu \le H_m(\psi)$. Từ Mệnh đề 2.13 trong [13] chúng ta suy ra $v \ge \psi$. Do đó chúng ta có $v \in \mathcal{A}$.

Từ lập luận trên, chúng ta xét toán tử $\mathcal{T} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ biến mỗi một hàm $u \in \mathcal{A}$ thành hàm $v := \mathcal{T}(u) \in \mathcal{A}$ là nghiệm duy nhất của phương trình $H_m(v) = \dfrac{1}{-F(u,z)} d\mu$.

Tiếp theo chúng ta sẽ chứng minh toán tử $\mathcal{T}$ liên tục trên $L^1(\Omega, d\mu)$. Xét dãy hàm $\{u_j\} \subset \mathcal{A}$, u_j hội tụ tới u trong $L^1(\Omega, d\mu)$. Ta cần chứng minh $\mathcal{T}(u_j) \to \mathcal{T}(u)$ trong $L^1(\Omega, d\mu)$. Thật vậy, tồn tại một dãy con của dãy $\{u_j\}$ (để thuận tiện về mặt trình bày ta vẫn dùng kí hiệu dãy con đó là $\{u_j\}$) sao cho $u_j \to u$ hầu khắp nơi theo $d\mu$. Với mỗi $z \in \Omega$ ta đặt

$\varphi_j^1(z) := \inf\limits_{k\geq j} \dfrac{1}{-F(u_k, z)}$,

$\varphi_j^2(z) := \sup\limits_{k\geq j} \dfrac{1}{-F(u_k, z)}$.

Khi đó, chúng ta có:

(i) $0 \leq \varphi_j^1(z) \leq \dfrac{1}{-F(u_j, z)} \leq \varphi_j^2(z) \leq 1$ với mọi $j \geq 1$.

(ii) $\lim\limits_{j\to\infty} \varphi_j^1(z) = \lim\limits_{j\to\infty} \varphi_j^2(z) = \dfrac{1}{-F(u,z)}$ hầu khắp nơi theo $d\mu$.

Theo Định lý 4.4 trong [11] tồn tại các hàm $v_j^1 \in \mathcal{F}_m(f)$ là nghiệm của các phương trình $H_m(v_j^1) = \varphi_j^1 d\mu$, hàm $v_j^2 \in \mathcal{F}_m(f)$ là nghiệm của phương trình $H_m(v_j^2) = \varphi_j^2 d\mu$ và hàm v_j là nghiệm của phương trình $H_m(v_j) = \dfrac{1}{-F(u_j, z)} d\mu$.

Theo Mệnh đề 2.13 trong [13] chúng ta có $v_j^1 \downarrow v^1, v_j^2 \uparrow v^2$. Hơn nữa, kết hợp Mệnh đề 2.13 trong [13] và (i) chúng ta có

$$v_j^1 \geq v_j = \mathcal{T}(u_j) \geq v_j^2. \tag{3}$$

Mặt khác, theo (ii) và Định lý hội tụ đơn điệu chúng ta có

$$H_m(v_j^1) \to \frac{1}{-F(u,z)} d\mu,$$

$$H_m(v_j^2) \to \frac{1}{-F(u,z)} d\mu.$$

Do đó, theo Định lý 3.8 trong [10] chúng ta có

$$H_m(v^1) = \frac{1}{-F(u,z)} d\mu = H_m(\mathcal{T}(u)),$$

$$H_m((v^2)^*) = \frac{1}{-F(u,z)} d\mu = H_m(\mathcal{T}(u)).$$

Theo Mệnh đề 2.13 trong [13] chúng ta có $v^1 = (v^2)^* = \mathcal{T}(u)$ trên Ω.

Kết hợp với bất đẳng thức (3), chúng ta có $\mathcal{T}(u_j) \to \mathcal{T}(u)$ ngoài một tập con *m*-cực của Ω.

Do độ đo μ triệt tiêu trên các tập con *m*-cực, chúng ta có $\mathcal{T}(u_j) \to \mathcal{T}(u)$ trong $L^1(\Omega, d\mu)$. Như vậy ta đã chứng minh được toán tử $\mathcal{T} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ liên tục.

Theo Định lý điểm bất động Schauder tồn tại $u \in \mathcal{A}$ sao cho $u = \mathcal{T}(u)$. Dễ thấy $H_m(u)$ triệt tiêu trên các tập *m*-cực, do đó chúng ta có $u \in \mathcal{F}_m^a(f)$. Định lý được chứng minh.

Tiếp theo chúng tôi giải phương trình *m*-Hessian có trọng trong trường hợp độ đo μ bị chặn bởi một hàm của Cap_m. Kết quả của Định lý sau đây lấy ý tưởng từ [18].

Định lý 3.2.

Cho μ là độ đo Borel không âm trên Ω với trọng hữu hạn và $G : [0,\infty) \to [0,\infty)$ là hàm không giảm sao cho $G(0) = 0$ và $\int_1^\infty G(\frac{1}{s^m}) ds < \infty$.

Nếu các điều kiện sau đây được thỏa mãn

(a) $\mu(X) \le G(Cap_m(X))$ *với mọi tập con Borel* X *của* Ω.

(b) Tồn tại hàm đo được $H:\Omega \to [0,\infty]$ *sao cho*

$-F(t,z) \ge H(z), \forall (t,z) \in (-\infty,0)\times\Omega$ *và* $c := \int\limits_{\Omega} \frac{1}{H} d\mu < \infty.$

Khi đó phương trình m-Hessian phức có trọng

$-F(u,z)H_m(u) = \mu$

có nghiệm $u \in \mathcal{F}_m(\Omega)$.

Chứng minh:

Đặt

$\mathcal{A} := \left\{u \in \mathcal{F}_m(\Omega) : \int_\Omega H_m(u) \le c\right\}.$

Chúng ta sẽ chứng minh rằng $\mathcal{A}$ là tập lồi. Thật vậy, với $\alpha \in [0,1],$ ta cần chứng minh

$\int\limits_\Omega H_m(\alpha u + (1-\alpha)v) \le c.$

Theo Mệnh đề 3.3 trong [10] chúng ta có

$$\int_\Omega H_m(\alpha u + (1-\alpha)v) = \int_\Omega dd^c(\alpha u + (1-\alpha)v)^m \wedge \beta^{n-m}$$
$$= \int_\Omega \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{m-k} (dd^c u)^k \wedge (dd^c v)^{m-k} \wedge \beta^{n-m}$$
$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{m-k} \int_\Omega (dd^c u)^k \wedge (dd^c v)^{m-k} \wedge \beta^{n-m}$$
$$\le \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{m-k} \Big[\int_\Omega H_m(u)\Big]^{\frac{k}{m}} \Big[\int_\Omega H_m(v)\Big]^{\frac{m-k}{m}}$$
$$\le \Big[\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{m-k}\Big] c = c.$$

Do đó chúng ta có $\mathcal{A}$ là tập lồi.

Tiếp theo chúng ta sẽ chứng minh $\mathcal{A}$ là tập compact trong $L^1(\Omega,\mu).$ Thật vậy, theo Mệnh đề 3.3 trong [10] chúng ta có $\mathcal{A} \subset L^1(\Omega, dV_{2n}).$

Lấy một dãy $\{u_j\}$ trong $\mathcal{A}$. Với $s > 0$ theo Định lý 3.1 trong [19] chúng ta có

$$Cap_m(\{u_j < -s\}) \le \frac{1}{s^m}\int_\Omega H_m(u_j) \le \frac{c}{s^m}. \tag{4}$$

Do đó u_j không thể hội tụ đều đến $-\infty$ trên các tập con compact của Ω. Từ đó, tồn tại dãy con của u_j (để tiện trình bày ta vẫn kí hiệu là u_j) hội tụ đến $u \in SH_m^-(\Omega)$ trong $L^1_{loc}(\Omega, dV_{2n})$. Theo Bổ đề 4.7 trong [20] chúng ta suy ra $u \in \mathcal{F}_m(\Omega).$

Tiếp theo chúng ta sẽ chứng minh u_j hội tụ đến u đến trong $L^1(\Omega,\mu).$ Thật vậy, từ giả thiết (a) và $G(0)=0$ chúng ta có μ là độ đo triệt tiêu trên các tập *m*-cực. Theo Bổ đề 3.1 chúng ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\sup_{j\geq 1}\int_\Omega (-u_j)d\mu < \infty. \tag{5}$$

Thật vậy, theo giả thiết (a) và áp dụng (4) với chú ý rằng G là hàm không giảm, chúng ta có

$\mu(\{u_j < -s\}) \leq G(Cap_m(\{u_j < -s\})) \leq G(\frac{c}{s^m}).$

Do đó theo giả thiết $\int_1^\infty G(\frac{1}{s^m})ds < \infty,$ chúng ta có

$\sup_{j\geq 1}\int_\Omega (-u_j)d\mu = \sup_{j\geq 1}\int_0^\infty \mu(\{u_j < -s\})ds < \infty.$

Như vậy chúng ta có bất đẳng thức (5).

Theo Bổ đề 3.1 chúng ta có $u_j \to u$ trong $L^1(\Omega,\mu).$ Như vậy chúng ta có $\mathcal{A}$ là tập lồi và compact trong $L^1(\Omega,\mu).$

Mặt khác, chúng ta đã có μ là độ đo triệt tiêu trên các tập m-cực. Hơn nữa từ giả thiết (b) chúng ta suy ra độ đo $\frac{1}{-F(u,z)}d\mu$ có trọng hữu hạn. Theo Định lý 4.4 trong [11], tồn tại $v \in \mathcal{F}_m(\Omega)$ sao cho $H_m(v) = \frac{1}{-F(u,z)}d\mu.$ Hơn nữa, từ giả thiết (b) chúng ta có

$\int_\Omega H_m(v) = \int_\Omega \frac{1}{-F(u,z)}d\mu \leq \int_\Omega \frac{1}{H}d\mu = c.$

Do đó chúng ta có $v \in \mathcal{A}.$

Chúng ta xét toán tử $\mathcal{T}:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ biến mỗi một hàm $u\in\mathcal{A}$ thành nghiệm duy nhất $v := \mathcal{T}(u) \in \mathcal{F}_m(\Omega)$ của phương trình $H_m(v) = \frac{1}{-F(u,z)}d\mu.$

Sử dụng lập luận như trong chứng minh của Định lý 3.1 (chỉ có một sự thay đổi nhỏ là thay thế chặn trên của dãy $\{\varphi_j^2\}$ là 1 trong Định lý 3.1 bởi $\frac{1}{H}$), chúng ta có $\mathcal{T}$ là liên tục. Theo Định lý điểm bất động Schauder toán tử $\mathcal{T}$ có điểm bất động là nghiệm của phương trình $-F(u,z)H_m(u) = \mu.$ Định lý được chứng minh.

Nhận xét

Theo Mệnh đề 2.1 trong [21], với mọi $p \in (0, \frac{n}{n-m})$ tồn tại một hằng số k chỉ phụ thuộc vào p sao cho $V_{2n}(X) \leq kCap_m(X)^p$ với mọi tập con Borel X của $\Omega.$ Do đó độ đo Lebesgue dV_{2n} thỏa mãn giả thiết (a) với hàm $G(x) = kx^p$ ở đó p là một số bất kì thuộc $(\frac{1}{m}, \frac{n}{n-m})$.

4. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi đã giải phương trình m-Hessian có trọng $-F(u,z)H_m(u) = \mu$ trong lớp $F_m(f)$ khi độ đo μ triệt tiêu trên các tập m-cực và bị chặn bởi toán tử m-Hessian của một hàm thuộc lớp $F_m(f)$. Chúng tôi cũng đã giải phương trình trên trường hợp độ đo μ bị chặn bởi một hàm của Cap_m.

Lời cám ơn

Công trình nghiên cứu này đã được trường Đại học Điện lực tài trợ thông qua đề tài nghiên cứu Khoa học cấp Trường năm 2023.

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

[1] E. Bedford and B. A.Taylor, "A new capacity for plurisubharmonic functions," *Acta Math*, vol. 149, pp.1-40, 1982.

[2] U. Cegrell, "Pluricomplex energy," *Acta Math*, vol. 180, pp. 187-217, 1998.

[3] U. Cegrell, "The general definition of the complex Monge-Ampère operator," *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, vol. 54, 159-179, 2004.

[4] U. Cegrell, "On the Dirichlet problem for the complex Monge-Ampère operator," *Math. Z.*, vol. 185, pp. 247–251, 1984.

[5] P. Ahag, "A Dirichlet problem for the complex Monge-Ampère operator in $\mathcal{F}(f)$," *Michigan Math. J.*, vol. 55, pp. 123-138, 2007.

[6] R. Czyz, "On the Monge-Ampère type equation in the Cegrell class $\mathcal{E}_\chi(\Omega)$," *Ann. Pol. Math*, vol. 99, no. 1, pp. 89-97, 2010.

[7] M. H. Le, H. H. Pham, X. H. Nguyen, and V. P. Nguyen, "The Monge-Ampère type equation in the weighted pluricomplex energy class," *Int. J. Math*., vol. 25, no. 05, 2014, Art. no.1450041.

[8] Z. Blocki, "Weak solutions to the complex Hessian equation," *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, vol. 55, pp. 1735-1756, 2005.

[9] H. C. Lu, "A variational approach to complex Hessian equation in $\mathbb{C}^n$," *J. Math. Anal. Appl.* , vol. 431, no. 1, pp. 228-259, 2015.

[10] V. H. Vu and V. P. Nguyen, "Hessian measures on *m*-polar sets and applications to the complex Hessian equations," *Complex Var. Elliptic Equa*., vol. 62, no. 8, pp. 1135-1164, 2017.

[11] A. El Gasmi, "The Dirichlet problem for the complex Hessian operator in the class $\mathcal{N}_m(\Omega)$," *Math. Scand.*, vol. 121, pp. 287-316, 2021.

[12] M. H. Le and V. Q. Vu, "Weak solutions to the complex *m*-Hessian type equation on open subsets of $\mathbb{C}^n$," *Complex Anal. Oper. Theory*, vol. 15, 2021, Art. no. 84, doi: 10.1007/s11785-021-01122-6.

[13] H. Amal, S. Asserda, and A. Gasmi, "Weak solutions to the complex Hessian type equations for arbitrary measures," *Compex Anal. Oper. Theory*, vol. 14, 2020, Art. no. 80, doi: 10.1007/s11785-020-01044-9.

[14] M. Klimek, *Pluripotential Theory*, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1991.

[15] A. S. Sadullaev and B. I. Abdullaev, "Potential theory in the class of m-subharmonic functions," *Trudy Mathematicheskogo Instituta imeni V. A. Steklova*, vol. 279, pp. 166-192, 2012.

[16] N. V. Phu, "Approximation of *m*-subharmonic function with given boundary values," *J. Math. Anal. Appl*., vol. 534, no. 2, 2024, Art. no. 128097, doi: 10.1016/j.jmaa.2024.128097.

[17] U. Cegrell, "Convergence in capacity," *Canad. Math. Bull.*, vol. 55, no. 2, pp. 242 – 248, 2012.

[18] S. Klodziej, "Equicontinuity of families of plurisubharmonic functions with bounds on their Monge-Amp$\grave{e}$re masses," *Math. Z*., vol. 240, pp. 835-847, 2002.

[19] V. T. Nguyen, "A characterization of the Cegrell classes and generalized *m*-capacities," *Ann. Polon. Math*., vol. 121, no. 1, pp. 33-43, 2018.

[20] V. T. Nguyen, "Maximal *m*-subharmonic functions and the Cegrell class $\mathcal{N}_m(\Omega)$," *Indag. Math*., vol. 30, no. 4, pp. 717-739, 2019.

[21] S. Dinew and S. Kolodziej, "A priori estimates for the complex Hessian equations," *Analysis & PDE*, vol. 7, pp. 227-244, 2014.