

EXISTENCE AND UNIQUE WEAK SOLUTION FOR THREE-DIMENSIONAL STOCHASTIC GLOBALLY MODIFIED NAVIER-STOKES EQUATIONS ON UNBOUNDED DOMAIN

Ho Thi Hang*, Pham Tri Nguyen

Electric Power University

ARTICLE INFO	ABSTRACT
Received: 17/02/2024 Revised: 29/02/2024 Published: 29/02/2024	In 2006, Caraballo, Kloeden and Real proposed a three dimensional alpha-model of Navier-Stokes equations in which the nonlinear term included a cut off factor $F_N(\ u\)$ based on the norm of the gradient of the solution in the whole domain. The authors called this system the three dimensional system of globally modified Navier-Stokes equations. Stochastic partial differential equations are a powerful tool to understand and study the mathematics of hydrodynamic and turbulence theory. To model turbulent fluids, mathematicians often use stochastic equations obtained from adding a noise term in the dynamical equations of the fluids. In this paper, we study the three dimensional globally modified Navier-Stokes equations driven by additive white noise on some unbounded domains satisfying the Poincaré inequality. By the Ornstein-Uhlenbeck process, we transfer the stochastic system into a deterministic one with random parameters. Then, we prove the existence and unique weak solution for this system by using the Galerkin method.
KEYWORDS Stochastic globally modified Navier-Stokes equations Weak solution Galerkin approximation Unbounded domain Additive noise	

SỰ TỒN TẠI VÀ DUY NHẤT NGHIỆM YẾU CỦA HỆ NAVIER-STOKES NGẪU NHIÊN CẢI BIÊN TOÀN CỤC BA CHIỀU TRONG MIỀN KHÔNG BỊ CHẶN

Hồ Thị Hằng*, Phạm Trí Nguyễn

Trường Đại học Điện lực

THÔNG TIN BÀI BÁO	TÓM TẮT
Ngày nhận bài: 17/02/2024 Ngày hoàn thiện: 29/02/2024 Ngày đăng: 29/02/2024	Năm 2006, Caraballo, Real và Kloeden đã đề xuất một alpha-mô hình ba chiều của hệ Navier-Stokes trong đó số hạng phi tuyến bao gồm một nhân tử chặt cụt $F_N(\ u\)$ dựa trên chuẩn của gradient của nghiệm trong toàn miền. Các tác giả gọi hệ này là hệ phương trình Navier-Stokes cải biên toàn cục ba chiều. Các phương trình đạo hàm ngẫu nhiên là một công cụ đặc lực để hiểu và nghiên cứu về mặt toán học của lý thuyết thủy động lực học và sự chuyển động hỗn loạn của chất lỏng. Để mô hình hóa chất lỏng hỗn loạn, các nhà toán học thường sử dụng các phương trình ngẫu nhiên thu được từ việc thêm một số hạng nhiễu vào phương trình động lực học của chất lỏng. Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu hệ Navier-Stokes ngẫu nhiên cải biên toàn cục ba chiều với nhiễu cộng tính trong miền không bị chặn thỏa mãn bất đẳng thức Poincaré. Bởi quá trình Ornstein-Uhlenbeck, chúng tôi chuyển hệ ngẫu nhiên thành hệ tất định với các tham số ngẫu nhiên. Sau đó, chúng tôi chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu của hệ theo phương pháp Galerkin.
TỪ KHÓA Hệ Navier-Stokes ngẫu nhiên cải biên toàn cục Nghiệm yếu Xấp xỉ Galerkin Miền không bị chặn Nhiều cộng tính	

DOI: <https://doi.org/10.34238/tnu-jst.9716>

* Corresponding author. Email: hanght@epu.edu.vn

1. Mở đầu

Hệ phương trình Navier-Stokes (hai hoặc ba chiều) là một lớp hệ rất quan trọng trong cơ học chất lỏng, lớp hệ này đã được nhiều tác giả trên thế giới quan tâm nghiên cứu và đạt được nhiều kết quả quan trọng. Trong trường hợp hai chiều, sự tồn tại và duy nhất nghiệm trong cả trường hợp tất định và ngẫu nhiên các kết quả đạt được tương đối trọn vẹn. Tuy nhiên, trong trường hợp ba chiều, ta biết rằng tính đặt đúng vẫn còn là vấn đề mở, ngay cả khi hệ là tất định. Gần đây, để đạt được tính đặt đúng trong trường hợp ba chiều, nhiều tác giả trên thế giới tập trung nghiên cứu những alpha-mô hình [1], đây là những biến thể của hệ Navier-Stokes ba chiều. Một trong những alpha-mô hình đó là hệ phương trình Navier-Stokes cải biên toàn cục ba chiều. Trong trường hợp tất định, lớp hệ này được đề cập và nghiên cứu đầu tiên bởi Caraballo và các cộng sự [2], trong đó các tác giả đã chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm mạnh của hệ, sau đó chứng minh sự tồn tại tập hút toàn cục trong không gian V của hệ. Từ công trình này, nhiều vấn đề về hệ Navier-Stokes cải biên toàn cục ba chiều đã được các nhà khoa học nghiên cứu như sự tồn tại và duy nhất của nghiệm yếu và nghiệm mạnh cũng như đáng điều kiện cận của nghiệm [3] - [8]. Trong trường hợp ngẫu nhiên, các nghiên cứu về hệ Navier-Stokes cải biên toàn cục ba chiều vẫn còn khá khiêm tốn, nhiều bài toán vẫn đang là vấn đề mở, thú vị cần được nghiên cứu.

Giả sử $\mathcal{O}$ là miền không bị chặn trong $\mathbb{R}^3$ thỏa mãn bất đẳng thức Poincaré, theo nghĩa tồn tại hằng số $\lambda > 0$ sao cho: $\lambda \int_{\mathcal{O}} \phi^2 dx \leq \int_{\mathcal{O}} |\nabla \phi|^2 dx$, $\forall \phi \in H_0^1(\mathcal{O})$. Cho trước $\tau \in \mathbb{R}$, ta xét hệ Navier-Stokes ngẫu nhiên cải biên toàn cục ba chiều với nhiễu cộng tính có dạng

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + F_N(\|u\|)(u \cdot \nabla)u = f(x, t) - \nabla p + g(x) \frac{dW(t)}{dt}, & x \in \mathcal{O}, t > \tau, \\ \nabla \cdot u = 0, & x \in \mathcal{O}, t > \tau, \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial \mathcal{O}, t > \tau, \\ u(x, \tau) = u_0(x), & x \in \mathcal{O}. \end{cases} \quad (1)$$

Trong đó $u = u(x, t)$ là hàm vận tốc chưa biết của dòng chất lỏng, u_0 là điều kiện ban đầu, $p = p(x, t)$ là hàm áp suất, $\nu > 0$ là hệ số nhớt của chất lỏng, $f(x, t)$ là hàm ngoại lực, W là quá trình Wiener thực, $g \in D(A)$ với A là toán tử Stokes (xem Mục 2), F_N là hàm cải biên toàn cục cho bởi $F_N : (0, +\infty) \rightarrow (0; 1]$, $r \mapsto F_N(r) = \min\{1, Nr^{-1}\}$.

2. Phương pháp nghiên cứu

Chúng tôi sử dụng phép đổi biến thích hợp để chuyển hệ ngẫu nhiên thành hệ tất định với các tham số ngẫu nhiên. Từ đó, chúng tôi áp dụng các phương pháp của lý thuyết hệ động lực tiêu hao vô hạn chiều để chứng tỏ sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu của hệ.

3. Kết quả và bàn luận

3.1. Các kiến thức chuẩn bị

Giả sử $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ là không gian xác suất, trong đó $\Omega = C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{\omega \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \omega(0) = 0\}$, $\mathcal{F}$ là σ -đại số Borel, $\mathbb{P}$ là độ đo Wiener trên $(\Omega, \mathcal{F})$ với $W(t, \omega) = \omega(t)$. Ký hiệu $\{\theta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ là dịch chuyển Wiener trên $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ cho bởi: $\theta_t \omega(s) = \omega(t+s) - \omega(t)$ với mọi $s, t \in \mathbb{R}$.

Ta nhắc lại một số không gian hàm cơ bản và các toán tử thường dùng:

$\mathcal{V} = \{u \in [C_0^\infty(\mathcal{O})]^3 : \nabla \cdot u = 0\}$ và $L^2(\mathcal{O})$ là không gian các hàm véc tơ bình phương khả tích từ $\mathcal{O}$ vào $\mathbb{R}^3$. Gọi $[L^2(\mathcal{O})]^3$ và $[H_0^1(\mathcal{O})]^3$ là các không gian Hilbert trang bị các tích vô hướng

$$(u, v) := \int_{\mathcal{O}} u \cdot v dx = \sum_{i=1}^3 \int_{\mathcal{O}} u_i v_i dx, \quad \forall u, v \in [L^2(\mathcal{O})]^3,$$

$$((u, v)) := \sum_{i=1}^3 \int_{\mathcal{O}} \nabla u_i \cdot \nabla v_i dx = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\mathcal{O}} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx, \quad \forall u, v \in [H_0^1(\mathcal{O})]^3,$$

với các chuẩn tương ứng với các tích vô hướng nói trên

$$\|u\| := ((u, u))^{1/2}, \quad \forall u \in [L^2(\mathcal{O})]^3 \quad \text{và} \quad \|u\| := ((u, u))^{1/2}, \quad \forall u \in [H_0^1(\mathcal{O})]^3.$$

Ký hiệu H và V là bao đóng tương ứng của $\mathcal{V}$ trong $[L^2(\mathcal{O})]^3$ và $[H_0^1(\mathcal{O})]^3$, H^* và V^* tương ứng là các không gian đối ngẫu của H và V , $\|\cdot\|_{V^*}$ là ký hiệu của chuẩn trên V^* và $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là kết hợp đối ngẫu giữa V và V^* . Toán tử Stokes $A : V \rightarrow V^*$ định nghĩa bởi

$$\langle Au, v \rangle = ((u, v)), \quad \forall u, v \in V, \quad \text{với} \quad D(A) = [H^2(\mathcal{O})]^3 \cap V.$$

Toán tử song tuyến tính $B : V \times V \rightarrow V^*$ định nghĩa bởi

$$\langle B(u, v), w \rangle = b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\mathcal{O}} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j dx, \quad \forall u, v, w \in V.$$

Ta có $b(u, v, w) = -b(u, w, v)$, $\forall u, v, w \in V$; $b(u, v, v) = 0$, $\forall u, v \in V$. Để đơn giản trong ký hiệu, ta viết $Bu = B(u, u)$. Với những ký hiệu như trên, hệ (1) được viết lại dưới dạng

$$\frac{du}{dt} - \nu Au + F_N(\|u\|)Bu = f(x, t) + g(x) \frac{dW(t)}{dt}. \quad (2)$$

Xét phương trình Ornstein-Uhlenbeck một chiều có dạng

$$dz(\theta_t \omega) = -\eta z(\theta_t \omega) dt + dW(t),$$

trong đó $\omega \in \Omega$ và η là một hằng số dương cố định. Chú ý rằng tồn tại một tập θ_t -bất biến

$\tilde{\Omega} \subseteq \Omega$ với $\mathbb{P}(\tilde{\Omega}) = 1$ sao cho $z(\theta_t \omega)$ là liên tục theo t với mọi $\omega \in \tilde{\Omega}$.

Các bổ đề dưới đây cần thiết cho chứng minh định lý chính ở mục sau.

Bổ đề 3.1. (xem [9, 10]) Với mọi $u, v, w \in V$, tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho

$$(i) \quad |b(u, v, w)| \leq C \|u\|^{\frac{1}{4}} \|u\|^{\frac{3}{4}} \|v\| \|w\|^{\frac{1}{4}} \|w\|^{\frac{3}{4}},$$

$$(ii) \quad |b(u, v, w)| \leq C \|u\| \|v\| \|w\|^{\frac{1}{2}} \|w\|^{\frac{1}{2}}.$$

Bổ đề 3.2. (xem [2, 4]) Với mọi $u, v \in V$ và với $N > 0$,

$$(i) \quad 0 \leq \|u\| F_N(\|u\|) \leq N,$$

$$(ii) \quad |F_N(\|u\|) - F_N(\|v\|)| \leq \frac{\|u - v\|}{\|v\|}, \quad v \neq 0.$$

Để kết thúc mục này, ta giả thiết hàm g thỏa mãn điều kiện sau

$$(G) \quad \text{Tồn tại } \tilde{k} > 0 \text{ sao cho } b(u, g, u) \leq \tilde{k} \|u\|^2, \quad \forall u \in H.$$

3.2. Kết quả chính

Đầu tiên ta trình bày định nghĩa về nghiệm yếu của hệ (1).

Định nghĩa 3.3. Giả sử $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, V^*)$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$ và $u_0 \in H$. Ánh xạ $u(\cdot, \tau, \omega, u_0) : [\tau, +\infty) \rightarrow H$ được gọi là nghiệm yếu của hệ (1) nếu với bất kỳ $T > \tau$ thì

$$u(\cdot, \tau, \omega, u_0) \in C(\tau, +\infty; H) \cap L^2(\tau, T; V),$$

$$\frac{du}{dt} - \nu Au + F_N(\|u\|)Bu = f + g \frac{dW}{dt}, \text{ trong } V^*.$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh kết quả chính của mục này về sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu của hệ (1). Để làm điều đó, trước hết ta chuyển bài toán ngẫu nhiên (2) thành bài toán tất định với các tham số ngẫu nhiên bằng phép đổi biến

$$v(t, \tau, \omega) = u(t, \tau, \omega) - g(x)z(\theta_t \omega), \quad v_0 = u_0 - g(x)z(\theta_\tau \omega). \quad (3)$$

Từ (2) và (3), ta thu được

$$\frac{dv}{dt} + \nu Av + F_N(\|v + gz\|)B(v + gz) = f + \eta gz - \nu Agz. \quad (4)$$

Định lý 3.4. Với $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, V^*)$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$, $u_0 \in V$, tồn tại duy nhất nghiệm yếu u của (1).

Chứng minh. (i) Sự tồn tại nghiệm: Để chứng minh sự tồn tại nghiệm, ta chia thành bốn bước.

➤ *Bước 1 (Xấp xỉ Galerkin):*

Gọi $\{e_i\}_{i=1}^{+\infty} \subset D(A)$ là cơ sở trực chuẩn cố định của H bao gồm các véc tơ riêng của toán tử A , và do đó nó cũng trực giao trong V . Ký hiệu P_n là phép chiếu trực giao từ H xuống không gian hữu hạn chiều $H_n := \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ cho bởi $P_n v := \sum_{j=1}^n (v, e_j) e_j$. Ta có P_n cũng là phép chiếu trực giao xuống H_n trong V . Xét xấp xỉ Galerkin $v_n(t) = \sum_{j=1}^n c_{nj}(t) e_j$ đối với hệ (4) có dạng

$$\frac{dv_n}{dt} + \nu Av_n + P_n F_N(\|v_n + gz\|)B(v_n + gz) = P_n f + \eta z P_n g - \nu z P_n Ag. \quad (5)$$

Trong đó $v_{n,0} := v_n(\tau) = P_n v_0$; $Av_n = \sum_{j=1}^n \lambda_j c_{nj} e_j$ và $\{\lambda_j : j \geq 1\}$ là các giá trị riêng của A .

➤ *Bước 2 (Các ước tính tiên nghiệm):*

Lấy tích vô hướng (5) với v_n và chú ý rằng $P_n v_n = v_n$, ta được

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|v_n\|^2 + 2\nu \|v_n\|^2 &= -2F_N(\|v_n + gz\|)b(v_n + gz, v_n + gz, v_n) \\ &\quad + 2\langle f, v_n \rangle + 2(\eta gz - \nu Agz, v_n). \end{aligned} \quad (6)$$

Sử dụng bất đẳng thức Young cho các số hạng trong vế phải của (6), ta có

$$2|\langle f, v_n \rangle| \leq \frac{\nu}{4} \|v_n\|^2 + \frac{4}{\nu} \|f\|_{V^*}^2 \quad (7)$$

$$2|(\eta gz - \nu Agz, v_n)| \leq \frac{\nu}{2} \|v_n\|^2 + 4\nu \|g\|^2 |z|^2 + \frac{4\eta^2}{\nu \lambda} |g|^2 |z|^2. \quad (8)$$

Mặt khác, bởi tính chất của hàm F_N và giả thiết (G)

$$\begin{aligned}
& 2 |F_N(\|v_n + gz\|)b(v_n + gz, v_n + gz, v_n)| \\
& \leq 2 |b(v_n + gz, gz, v_n + gz)| = 2 |z| |b(v_n + gz, g, v_n + gz)| \\
& \leq 2\tilde{k} |z| \|v_n + gz\|^2 \leq 4\tilde{k} |z| (\|v_n\|^2 + \|g\|^2 |z|^2).
\end{aligned} \quad (9)$$

Thay (7)-(9) vào (6), ta thu được

$$\frac{d}{dt} \|v_n\|^2 + (\nu\lambda - 4\tilde{k} |z|) \|v_n\|^2 + \frac{\nu}{4} \|v_n\|^2 \leq \frac{4}{\nu} \|f\|_{V^*}^2 + \zeta(\theta_t \omega), \quad (10)$$

trong đó: $\zeta(\theta_t \omega) = 4\nu \|g\|^2 |z(\theta_t \omega)|^2 + 4\tilde{k} |g|^2 |z(\theta_t \omega)|^3 + \frac{4\eta^2}{\nu\lambda} |g|^2 |z(\theta_t \omega)|^2$.

Tiếp theo, nhân hai vế của (10) với $e^{\nu\lambda - 4\tilde{k}|z(\theta_t \omega)|}$ rồi lấy tích phân trên $[\tau, s]$, ta suy ra

$$\begin{aligned}
& \|v_n(s, \tau, \omega, v_{n,0})\|^2 + \frac{\nu}{4} e^{-(\nu\lambda - 4\tilde{k}|z(\theta_s \omega)|)} \int_{\tau}^s e^{\nu\lambda - 4\tilde{k}|z(\theta_r \omega)|} \|v_n(r, \tau, \omega, v_{n,0})\|^2 dr \\
& \leq e^{-(\nu\lambda - 4\tilde{k}|z(\theta_s \omega)|)} \left[e^{\nu\lambda - 4\tilde{k}|z(\theta_{\tau} \omega)|} \|v_{n,0}\|^2 + \frac{4}{\nu} \int_{\tau}^s e^{\nu\lambda - 4\tilde{k}|z(\theta_r \omega)|} \|f(r)\|_{V^*}^2 dr + \int_{\tau}^s e^{\nu\lambda - 4\tilde{k}|z(\theta_r \omega)|} \zeta(\theta_r \omega) dr \right].
\end{aligned} \quad (11)$$

Vì $\|v_{n,0}\| = \|P_n v_0\| \leq \|v_0\|$ cùng với (11), ta có

$$\begin{aligned}
& \|v_n(s, \tau, \omega, v_{n,0})\|^2 + \frac{\nu}{4} e^{-(\nu\lambda - 4\tilde{k}|z(\theta_s \omega)|)} \int_{\tau}^s e^{\nu\lambda - 4\tilde{k}|z(\theta_r \omega)|} \|v_n(r, \tau, \omega, v_{n,0})\|^2 dr \\
& \leq e^{-(\nu\lambda - 4\tilde{k}|z(\theta_s \omega)|)} \left[e^{\nu\lambda - 4\tilde{k}|z(\theta_{\tau} \omega)|} \|v_0\|^2 + \frac{4}{\nu} \int_{\tau}^s e^{\nu\lambda - 4\tilde{k}|z(\theta_r \omega)|} \|f(r)\|_{V^*}^2 dr + \int_{\tau}^s e^{\nu\lambda - 4\tilde{k}|z(\theta_r \omega)|} \zeta(\theta_r \omega) dr \right].
\end{aligned} \quad (12)$$

Nhận thấy rằng vế phải của (12) là bị chặn, do đó v_n bị chặn đều (theo n) trong $L^\infty(\tau, T; H)$ và $L^2(\tau, T; V)$. Ta đánh giá thêm một mức nữa bằng cách nhân vô hướng (5) với Av_n

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \|v_n\|^2 + 2\nu \|Av_n\|^2 \\
& = -2F_N(\|v_n + gz\|)b(v_n + gz, v_n + gz, Av_n)\nu\lambda \|v_n\|^2 + 2(f, Av_n) + 2z(\eta g - \nu Ag, Av_n).
\end{aligned} \quad (13)$$

Sử dụng Bổ đề 3.1 và bất đẳng thức Young cho các số hạng trong vế phải của (13), ta có

$$|2(f, Av_n)| \leq \frac{\nu}{4} \|Av_n\|_{V^*}^2 + \frac{4}{\nu} \|f\|_{V^*}^2, \quad (14)$$

$$|2F_N(\|v_n + gz\|)b(v_n + gz, v_n + gz, Av_n)| \leq \frac{\nu}{4} \|Av_n\|_{V^*}^2 + C \|v_n\|^2 + C |z|^2, \quad (15)$$

$$|2z(\eta g - \nu Ag, Av_n)| \leq \frac{\nu}{4} \|Av_n\|_{V^*}^2 + C \|v_n\|^2 + C |z|^2, \quad (16)$$

trong đó $C > 0$ là một hằng số nào đó và nó không nhất thiết phải giống nhau trong các đánh giá. Thay (14)-(16) vào (13), ta được

$$\frac{d}{dt} \|v_n\|^2 + \frac{5\nu}{4} \|Av_n\|_{V^*}^2 \leq C \|v_n\|^2 + C |z|^2 + \frac{4}{\nu} \|f\|_{V^*}^2. \quad (17)$$

Bỏ qua số hạng thứ hai trong vế trái của (17), sau đó tích phân hai vế trên $[\tau, s]$ với chú ý rằng $\|v_{n,0}\| = \|P_n v_0\| \leq \|v_0\|$, ta suy ra

$$\|v_n(s, \tau, \omega, v_{n,0})\|^2 \leq \|v_0\|^2 + C \int_{\tau}^s \|v_n(r)\|^2 dr + C \int_{\tau}^s |z(\theta_r \omega)|^2 dr + \frac{4}{\nu} \int_{\tau}^s \|f(r)\|_{V^*}^2 dr. \quad (18)$$

Từ (18) ta thấy v_n bị chặn đều (theo n) trong $L^\infty(\tau, T; V)$. Do A là toán tử tuyến tính liên tục từ V vào V^* , nên $\{Av_n\}$ bị chặn đều (theo n) trong $L^2(\tau, T; V^*)$. Mặt khác, theo Bổ đề 3.1

$\|B(v_n + gz, v_n + gz)\|_{V^*} \leq C \|v_n + gz\|^2 \leq 2C(\|v_n\|^2 + \|z\|^2 \|g\|^2),$
 nên $\{B(v_n + gz)\}$ bị chặn đều (theo n) trong $L^2(\tau, T; V^*)$ và do đó
 $\{P_n F_N(\|v_n + gz\|)B(v_n + gz)\}$ bị chặn đều (theo n) trong $L^2(\tau, T; V^*)$. Lại do (5) ta có

$$\frac{dv_n}{dt} = -\nu A v_n - P_n F_N(\|v_n + gz\|)B(v_n + gz) + P_n f + \eta z P_n g - \nu z P_n A g,$$

 nên $\left\{\frac{dv_n}{dt}\right\}$ bị chặn đều (theo n) trong $L^2(\tau, T; V^*)$.

➤ *Bước 3 (Chuyển qua giới hạn):*

Từ các ước lượng ở Bước 2, ta có thể trích ra một dãy con của dãy $\{v_n\}$, mà ta vẫn ký hiệu dãy con đó là $\{v_n\}$, sao cho

$$\begin{aligned} v_n &\text{ hội tụ yếu đến } v \text{ trong } L^2(\tau, T; V), \\ A v_n &\text{ hội tụ yếu đến } A v \text{ trong } L^2(\tau, T; V^*), \\ \frac{dv_n}{dt} &\text{ hội tụ yếu đến } \frac{dv}{dt} \text{ trong } L^2(\tau, T; V^*). \end{aligned}$$

Tiếp theo, ta cần chứng minh sự hội tụ yếu của số hạng $P_n F_N(\|v_n + gz\|)B(v_n + gz)$ và do đó ta chỉ cần chứng tỏ rằng với mỗi $j = 1, 2, \dots$ thì

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\tau}^t F_N(\|v_n + gz\|) b(v_n + gz, v_n + gz, e_j) dr = \int_{\tau}^t F_N(\|v + gz\|) b(v + gz, v + gz, e_j) dr.$$

Đặt $\mathcal{O}_j = \text{supp}(e_j) \cap \mathcal{O}$, thì $\mathcal{O}_j$ là miền bị chặn. Lập luận tương tự như trong Định lý 7 [2] (Trường hợp 1), ta có

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\int_{\tau}^t \int_{\mathcal{O}} F_N(\|v_n + gz\|) ((v_n + gz) \cdot \nabla) (v_n + gz) dx dr \right. \\ &\quad \left. - \int_{\tau}^t \int_{\mathcal{O}} F_N(\|v + gz\|) ((v + gz) \cdot \nabla) (v + gz) dx dr \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\int_{\tau}^t \int_{\mathcal{O}_j} F_N(\|v_n + gz\|) ((v_n + gz) \cdot \nabla) (v_n + gz) dx dr \right. \\ &\quad \left. - \int_{\tau}^t \int_{\mathcal{O}_j} F_N(\|v + gz\|) ((v + gz) \cdot \nabla) (v + gz) dx dr \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\tau}^t \left[F_N(\|v_n + gz\|) b(v_n + gz, v_n + gz, e_j) - F_N(\|v + gz\|) b(v + gz, v + gz, e_j) \right] dr = 0. \end{aligned}$$

Chuyển qua giới hạn trong (5) ta nhận được v là nghiệm yếu của (4) và do đó u là nghiệm yếu của (1).

➤ *Bước 4 (Chứng minh $u(\tau) = u_0$):*

Chọn tùy ý hàm thử $\varphi \in C^1(\tau, T; V)$ với $\varphi(T) = 0$ rồi lấy tích vô hướng của (4) với φ

$$\left\langle \frac{dv}{dt}, \varphi \right\rangle + \nu((v, \varphi)) + F_N(\|v + gz\|)b(v + gz, v + gz, \varphi) = \langle f, \varphi \rangle + (\eta gz - \nu Agz, \varphi). \quad (19)$$

Tích phân từng phần (19) từ τ đến T , ta được

$$\begin{aligned} & - \int_{\tau}^T (v, \varphi') dt + \nu \int_{\tau}^T ((v, \varphi)) dt + \int_{\tau}^T F_N(\|v + gz\|)b(v + gz, v + gz, \varphi) dt \\ & = (v(\tau), \varphi(\tau)) + \int_{\tau}^T \langle f, \varphi \rangle dt + \int_{\tau}^T (\eta gz - \nu Agz, \varphi) dt. \end{aligned} \quad (20)$$

Thực hiện tương tự với nghiệm xấp xỉ Galerkin, ta cũng có

$$\begin{aligned} & - \int_{\tau}^T (v_n, \varphi') dt + \nu \int_{\tau}^T ((v_n, \varphi)) dt + \int_{\tau}^T F_N(\|v_n + gz\|)b(v_n + gz, v_n + gz, \varphi) dt \\ & = (v_n(\tau), \varphi(\tau)) + \int_{\tau}^T \langle f, \varphi \rangle dt + \int_{\tau}^T (\eta gz - \nu Agz, \varphi) dt. \end{aligned} \quad (21)$$

Chuyển qua giới hạn trong (21) với chú ý rằng $v_n(\tau) = P_n v_0 \rightarrow v_0$ (khi $n \rightarrow +\infty$)

$$\begin{aligned} & - \int_{\tau}^T (v, \varphi') dt + \nu \int_{\tau}^T ((v, \varphi)) dt + \int_{\tau}^T F_N(\|v + gz\|)b(v + gz, v + gz, \varphi) dt \\ & = (v_0, \varphi(\tau)) + \int_{\tau}^T \langle f, \varphi \rangle dt + \int_{\tau}^T (\eta gz - \nu Agz, \varphi) dt. \end{aligned} \quad (22)$$

So sánh (20) và (22) ta thấy $v(\tau) = v_0$. Điều này kéo theo $u(\tau) = u_0$.

(ii) Sự duy nhất nghiệm: Giả sử u_1, u_2 là hai nghiệm yếu của hệ (1) với cùng điều kiện đầu.

Ký hiệu $\mathcal{G} = u_2 - u_1 = v_2 - v_1$. Sử dụng (4) cho các nghiệm v_1, v_2 ta suy ra

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathcal{G}\|^2 + \nu \|\mathcal{G}\|^2 \\ & = -F_N(\|v_2 + gz\|)b(v_2 + gz, v_2 + gz, \mathcal{G}) + F_N(\|v_1 + gz\|)b(v_1 + gz, v_1 + gz, \mathcal{G}) \\ & = -F_N(\|v_2 + gz\|)b(\mathcal{G}, v_2 + gz, \mathcal{G}) \\ & \quad - [F_N(\|v_2 + gz\|) - F_N(\|v_1 + gz\|)]b(v_1 + gz, v_2 + gz, \mathcal{G}) \\ & \quad - F_N(\|v_1 + gz\|)b(v_1 + gz, \mathcal{G}, \mathcal{G}). \end{aligned} \quad (23)$$

Áp dụng các bổ đề 3.1 và 3.2, bất đẳng thức Young ta có các đánh giá

$$\begin{aligned} |F_N(\|v_2 + gz\|)b(\mathcal{G}, v_2 + gz, \mathcal{G})| & \leq |b(\mathcal{G}, v_2 + gz, \mathcal{G})| \leq C \|v_2 + gz\| \|\mathcal{G}\|^{3/2} |\mathcal{G}|^{1/2} \\ & \leq \frac{\nu}{4} \|\mathcal{G}\|^2 + C(\|v_2\|^4 + \|z\|^4 \|g\|^4) |\mathcal{G}|^2, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & |F_N(\|v_2 + gz\|) - F_N(\|v_1 + gz\|)]b(v_1 + gz, v_2 + gz, \mathcal{G})| \\ & \leq C \frac{\|\mathcal{G}\|}{\|v_1 + gz\|} \|v_1 + gz\| \|v_2 + gz\| \|\mathcal{G}\|^{1/2} |\mathcal{G}|^{1/2} \end{aligned} \quad (25)$$

$$= C \|v_2 + gz\| \|\mathcal{G}\|^{3/2} |\mathcal{G}|^{1/2} \leq \frac{\nu}{4} \|\mathcal{G}\|^2 + C(\|v_2\|^4 + \|z\|^4 \|g\|^4) |\mathcal{G}|^2,$$

và

$$\begin{aligned} |F_N(\|v_1 + gz\|)b(v_1 + gz, \mathcal{G}, \mathcal{G})| & \leq |b(v_1 + gz, \mathcal{G}, \mathcal{G})| \leq C \|v_1 + gz\| \|\mathcal{G}\|^{3/2} |\mathcal{G}|^{1/2} \\ & \leq \frac{\nu}{4} \|\mathcal{G}\|^2 + C(\|v_1\|^4 + \|z\|^4 \|g\|^4) |\mathcal{G}|^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Thay (24)-(26) vào (23), ta thu được

$$\frac{d}{dt} \|\mathcal{G}\|^2 + \frac{\nu}{2} \|\mathcal{G}\|^2 \leq \left[\frac{2}{\nu} + C(2 \|v_2\|^4 + \|v_1\|^4 + 3 \|g\|^4 |z|^4) \right] \|\mathcal{G}\|^2. \quad (27)$$

Lược bỏ số hạng thứ hai trong vế trái của (27), sau đó áp dụng bất đẳng thức Gronwall trên $[\tau, t]$, ta suy ra

$$\|\mathcal{G}(t)\|^2 \leq \|\mathcal{G}(\tau)\|^2 e^{\int_{\tau}^t Q(s) ds}, \quad (28)$$

với $Q(s) = \frac{2}{\nu} + C(2 \|v_2(s)\|^4 + \|v_1(s)\|^4 + 3 \|g\|^4 |z(\theta_s \omega)|^4)$. Vì u_1, u_2 có cùng điều kiện đầu nên $\mathcal{G}(\tau) = 0$. Do đó từ (28) ta có $\mathcal{G}(t) = 0$ với mọi $t > \tau$, hay $u_1 = u_2$.

4. Kết luận

Trong nghiên cứu này, chúng tôi đã chứng minh được sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu của hệ Navier-Stokes ngẫu nhiên cải biên toàn cục 3 chiều với nhiễu cộng tính trong miền không bị chặn. Từ đó, ta có thể phát triển một số hướng nghiên cứu tiếp theo đối với hệ này, chẳng hạn như: Sự tồn tại tập hút của hệ; Tính liên tục theo xác suất, liên tục hầu chắc chắn của tập hút đối với khoảng cách Hausdorff cùng với tính trơn và số chiều của nó.

Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được Trường Đại học Điện lực tài trợ thông qua đề tài nghiên cứu khoa học cấp trường năm 2023 với mã số đề tài: ĐTKHCN.17/2023.

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

- [1] T. Caraballo, A. M. Márquez-Durán, and J. Real, "The asymptotic behavior of a stochastic 3D LANS-model," *Appl. Math. Optim.*, no. 53, pp. 141-161, 2006.
- [2] T. Caraballo, J. Real, and P. E. Kloeden, "Unique strong solutions and V-attractor of a three dimensional system of globally modified Navier-Stokes equations," *Adv. Nonlinear Stud.*, no. 6, pp. 411-436, 2006.
- [3] M. Romito, "The uniqueness of weak solutions of the globally modified Navier-Stokes equations," *Adv. Nonlinear Stud.*, no.9, pp. 425-427, 2009.
- [4] G. Deugoué and T. Medjo, "The stochastic 3D globally modified Navier-Stokes equations: existence, uniqueness and asymptotic behavior," *Commun. Pure Appl. Anal.*, vol. 17, no. 6, pp. 2593-2621, 2018.
- [5] P. E. Kloeden, J. A. Langa, and J. Real, "Pullback V-attractors of the three dimensional system of nonautonomous globally modified Navier-Stokes equations: existence and finite fractal dimension," *Commun. Pure Appl. Anal.*, no. 6, pp. 937-955, 2007.
- [6] P. Marín-Rubio, A. M. Márquez-Durán, and J. Real, "Three-dimensional system of globally modified Navier-Stokes equations with infinite delays," *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser-B*, no. 14, pp. 655-673, 2010.
- [7] P. Marín-Rubio, A. M. Márquez-Durán, and J. Real, "Pullback attractors for globally modified Navier-Stokes equations with infinite delays," *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser-A*, no. 31, pp. 779-796, 2011.
- [8] P. Marín-Rubio, A. M. Márquez-Durán, and J. Real, "Asymptotic behavior of solutions for a three dimensional system of globally modified Navier-Stokes equations with a locally Lipschitz delay term," *Nonlinear Anal.*, no. 79, pp. 68-79, 2013.
- [9] P. Constantin and C. Foias, *Navier-Stokes equations*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, 1988.
- [10] R. Temam, *Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis*, 2nd ed., Amsterdam: North-Holland, 1979.