ISSN: 1859-2171
e-ISSN: 2615-9562 TNU Journal of Science and Technology 208(15): 177 - 183

ĐỊNH LÝ KIỂU BOHL-PERRON CHO PHƯƠNG TRÌNH ĐỘNG LỰC ẨN TRÊN THANG THỜI GIAN

Nguyễn Thu Hà
Trường Đại học Điện lực

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi phát triển lý thuyết ổn định cho phương trình động lực ẩn trên thang thời gian. Đây là dạng tổng quát của phương trình vi phân đại số và phương trình sai phân ẩn. Cụ thể, ta nghiên cứu định lý Bohl-Perron cho phương trình động lực ẩn trên thang thời gian. Chúng tôi chỉ ra được mối liên hệ giữa tính bị chặn của nghiệm của phương trình động lực ẩn không thuần nhất với tính ổn định của phương trình thuần nhất tương ứng.

Từ khóa: *Định lý Bohl-Perron; Tính ổn định; Phương trình động lực ẩn; Thang thời gian.*

Ngày nhận bài: 18/10/2019; Ngày hoàn thiện: 24/11/2019; Ngày đăng: 27/11/2019

BOHL-PERRON TYPE THEOREM FOR IMPLICIT DYNAMIC EQUATIONS ON TIME SCALES

Nguyen Thu Ha
Electric Power University

ABSTRACT

In this paper, we develop a stability theory for implic it dynamic equations which is a general form of differential algebraic equations and implicit difference equations. Specifically, we investigate Bohl-Perron type stability theorems for implicit dynamic equations on the time scales. We show the relation between the boundedness of the solution of the nonhomogeneous implicit dynamic equation and the stability of the corresp onding homogeneous equation.

Từ khóa: *Bohl-Perron theorem; Stability; Implicit dynamic equation; Time scale.*

Received: 18/10/2019; Revised: 24/11/2019; Published: 27/11/2019

Email: ntha2009@yahoo.com

1 Giới thiệu

Như chúng ta đã biết, bài toán về tính ổn định có vai trò rất quan trọng trong toán học và ứng dụng. Việc tìm ra các điều kiện để hệ thống vẫn hoạt động ổn định dưới tác động của nhiễu là bài toán có ý nghĩa lớn. Để đo tính ổn định vững, người ta tiến hành các thử nghiệm và hy vọng rằng nếu với đầu vào tốt hơn, thì đầu ra sẽ đáp ứng một số thuộc tính mong muốn và hệ thống của chúng ta vẫn ổn định mũ.

Vào đầu thế kỷ 20, Bohl, và sau đó là Perron đã xét bài toán trên cho phương trình vi phân thường. Sau đó định lý ổn định kiểu Bohl-Perron cũng áp dụng cho phương trình sai phân trong [1,8], phương trình sai phân có trễ trong [2,4] và cho phương trình sai phân ẩn trong [6,7]. Do đó, rất có ý nghĩa khi bài toán này được giải quyết cho một phương trình ẩn trên thang thời gian tổng quát. Trong bài báo này, ta sẽ nghiên cứu định lý ổn định kiểu Bohl-Perron cho một lớp phương trình động lực ẩn có dạng

$$E_\sigma(t)x^\Delta(t) = A(t)x(t),\ t \ge a,\ t \in \mathbb{T} \quad (1.1)$$

ở đó $E(\cdot), A(\cdot)$ là các hàm ma trận liên tục định nghĩa trên $\mathbb{T} \cap [a, \infty)$, lấy giá trị trong $\mathbb{R}^{n\times n}$ và $E_\sigma(t)$ được giả thiết là suy biến $t \ge a$. Nếu (1.1) chịu nhiễu $q(t)$, ta có phương trình không thuần nhất

$$E_\sigma(t)x^\Delta(t) = A(t)x(t) + q(t). \quad (1.2)$$

2 Kiến thức chung

Thang thời gian $\mathbb{T}$ là một tập con đóng khác rỗng của $\mathbb{R}$. Trên thang thời gian $\mathbb{T}$ ta trang bị tô pô được cảm sinh từ tô pô chuẩn tắc trên đường thẳng thực $\mathbb{R}$.

Trên $\mathbb{T}$, ta định nghĩa *toán tử nhảy tiến* $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} :\ s > t\}$, và *toán tử nhảy lùi* $\rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T} :\ s < t\}$, $t \in \mathbb{T}$. *Hàm hạt* $\mu : \mathbb{T} \to \mathbb{R}_+$ được xác định bởi $\mu(t) = \sigma(t) - t$, $t \in \mathbb{T}$. Điểm $t \in \mathbb{T}$ được gọi là *cô lập phải* nếu $\sigma(t) > t$; là *trù mật phải* nếu $\sigma(t) = t$ và *cô lập trái* nếu $\rho(t) < t$, *trù mật trái* nếu $\rho(t) = t$.

Với mọi $x, y \in \mathbb{T}$, ta định nghĩa các phép toán trên thang thời gian

phép cộng $\oplus$: $x \oplus y := x + y + \mu(t)xy$;

phép trừ $\ominus$: $x \ominus y := \dfrac{x-y}{1+\mu(t)y}$;

Hàm số $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ được gọi *chính quy*, nếu tồn tại các giới hạn phải tại các điểm trù mật phải và giới hạn trái tại các điểm trù mật trái. Hàm f là *rd-liên tục* nếu nó liên tục tại các điểm trù mật phải của $\mathbb{T}$ và tồn tại giới hạn trái tại các điểm trù mật trái. Tập các hàm rd-liên tục ký hiệu là $C_{\mathrm{rd}}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$. Hàm f được gọi là *hồi quy* (dương) nếu $1 + \mu(t)p(t) \ne 0 (1 + \mu(t)p(t) > 0), t \in \mathbb{T}$. Ký hiệu $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ($\mathcal{R}^+ = \mathcal{R}^+(\mathbb{T}, \mathbb{R})$) là tập các hàm hồi quy (hồi quy dương).

Định nghĩa 2.1 (Δ-Đạo hàm)**.** Hàm số $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^d$ được gọi là có *Δ-đạo hàm* tại t nếu tồ tại véc tơ $f^\Delta(t)$ sao cho với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)\| \le \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

thỏa mãn với mọi $s \in (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$. Khi đó $f^\Delta(t)$ được gọi là *Δ-đạo hàm* của f tại t.

Định lý 2.2. [3] *Cho $p \in \mathcal{R}$ và $t_0 \in \mathbb{T}$, khi đó nghiệm duy nhất của bài toán giá trị ban đầu*

$$y^\Delta(t) = p(t),\ y(t_0) = 1$$

trên $\mathbb{T}$ là hàm mũ $e_p(t, t_0)$.

Bổ đề 2.3. [3] *[Bất đẳng thức Gronwall-Bellman] Cho $\tau \in \mathbb{T}$, $u, b \in C_{rd}$, $u_0 \in \mathbb{R}$ và $b(t) \ge 0$ với mọi $t \ge \tau$. Khi đó, nếu*

$$u(t) \le u_0 + \int_\tau^t b(s)u(s)\Delta s, \quad \text{với mọi} \quad t \ge \tau,$$

thì ta có $u(t) \le u_0 e_b(t, \tau)$ với mọi $t \ge \tau$.

3 Tính giải được của hệ động lực ẩn

Lấy $a \in \mathbb{T}$ cố định. Ta xét hệ động lực ẩn tuyến tính trên thang thời gian $\mathbb{T}$,

$$E_\sigma(t)x^\Delta(t) = A(t)x(t) + q(t),\ t \geq a, \quad (3.1)$$

với E, A là các ma trân như đã xét ở mục 1. Giả sử rank $E(t) = r$, $1 \leq r < n$, với mọi $t \in \mathbb{T}_a$, và $q : \mathbb{T}_a \to \mathbb{R}^n$ là hàm liên tục. Giả sử $\ker E(t)$ trơn theo nghĩa là tồn tại phép chiếu $Q(t)$ lên $\ker E(t)$ sao cho $Q(t)$ là khả vi liên tục với mọi $t > a$ và liên tục trên $\mathbb{T}_a$. Với $P(t) = I - Q(t)$, khi đó, phương trình (3.1) được viết lại dưới dạng

$$E_\sigma(t)(Px)^\Delta(t) = \overline{A}(t)x(t) + q(t), \quad (3.2)$$

với $\overline{A} := A + E_\sigma P^\Delta \in L_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{T}; \mathbb{R}^{n\times n})$.

Cho $T : \mathbb{T}_a \to \text{Gl}(\mathbb{R}^n)$ là một hàm liên tục sao cho $T|_{\ker E_\sigma}$ là một đẳng cấu giữa $\ker E_\sigma$ và $\ker E$. Ký hiệu

$$G := E_\sigma - \overline{A}TQ_\sigma \text{ và } S := \{x : Ax \in \text{im } E_\sigma\}.$$

Bổ đề 3.1. *Các mệnh đề sau là tương đương,*

i) $S \cap \ker E = \{0\}$;

ii) G *không suy biến*;

iii) $\mathbb{R}^n = S \oplus \ker E$.

Chứng minh Xem [5. Lemma 2.1].

Giả sử ma trận G không suy biến, khi đó ta có bổ đề sau.

Bổ đề 3.2. *Ta có các mối liên hệ sau:*

i) $P_\sigma = G^{-1}E_\sigma$;

ii) $G^{-1}\overline{A}TQ_\sigma = -Q_\sigma$;

iv) Nếu $\widehat{Q}$ *là phép chiếu trên* $\ker E$ *thì*

$$P_\sigma G^{-1}\overline{A} = P_\sigma G^{-1}\overline{A}\widehat{P},$$
$$Q_\sigma G^{-1}\overline{A} = Q_\sigma G^{-1}\overline{A}\widehat{P} - T^{-1}\widehat{Q}.$$

Chứng minh Chứng minh tương tự Lemma 2.2 [5].

Bổ đề 3.3. $P_\sigma G^{-1}, TQ_\sigma G^{-1}$ *không phụ thuộc vào cách chọn* T *và* Q.

Chứng minh Gọi Q' là các phép chiếu lên $\ker A$ và $T' \in Gl(\mathbb{R}^d)$ sao cho $T'|_{\ker E_\sigma}$ là một đẳng cấu giữa $\ker E_\sigma$ và $\ker E$. Ta sẽ chứng minh

$TQ_\sigma G^{-1} = T'Q'_\sigma G'^{-1}$ with $G' = E_\sigma - \overline{A}T'Q'_\sigma$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} TQ_\sigma G^{-1}G' &= TQ_\sigma G^{-1}(E_\sigma - \overline{A}T'Q'_\sigma) \\ &= TQ_\sigma G^{-1}\overline{A}T'Q'_\sigma = T'Q'_\sigma. \end{aligned}$$

Vậy, $TQ_\sigma G^{-1} = T'Q'_\sigma G'^{-1}$. Tương tự ta cũng có $P_\sigma G^{-1} = P_\sigma G'^{-1}$. Bổ đề được chứng minh.

Ý nghĩa 3.4. Các bổ đề trên có vai trò rất lớn trong việc giải được phương trình động lực ẩn. Nó giúp ta phân rã 3.2 và đưa nó về một phương trình động lực thường và một quan hệ đại số. Điều này giúp ta dễ dàng hơn trong việc biểu diễn nghiệm của 3.2.

Định nghĩa 3.5. Phương trình động lực ẩn (3.1) được gọi là có chỉ số 1 mềm (gọi tắt là chỉ số 1) trên $\mathbb{T}$ nếu $G(t)$ khả nghịch với mọi $t \in \mathbb{T}$.
Cho $J \subset \mathbb{T}$. Ký hiệu

$$\begin{aligned} \mathrm{C}^1(\mathrm{J}, \mathbb{R}^\mathrm{n}) := \{&x(\cdot) \in \mathrm{C_{rd}}(\mathrm{J}, \mathbb{R}^\mathrm{n}) : \mathrm{P(t)x(t)} \text{ là} \\ &\text{khả vi} - \Delta \text{ với mọi } t \in J.\} \end{aligned}$$

Ta chú ý rằng nghiệm $x(\cdot)$ của (3.1) là phần tử của $\mathrm{C}^1(J, \mathbb{R}^n)$. Ở đó $x(\cdot)$ là không khả vi-Δ. Do đó chúng ta hiểu rằng biểu diễn $E_\sigma x^\Delta$ có nghĩa là $E_\sigma((Px)^\Delta - P^\Delta x)$.

Nhân hai vế của (3.2) với $P_\sigma G^{-1}$, $Q_\sigma G^{-1}$ và đặt $u = Px$ and $v = Qx$, ta được

$$u^\Delta = (P^\Delta + P_\sigma G^{-1}\overline{A})u + P_\sigma G^{-1}q, \quad (3.3)$$
$$v = TQ_\sigma G^{-1}\overline{A}u + TQ_\sigma G^{-1}q. \quad (3.4)$$

Ta có $x = u + v$, với u có thể tìm từ (3.3), sau đó dùng (3.4) để tính được v. Từ đó ta thấy, ta chỉ cần đặt ra điều kiện đầu cho (3.3) $u(t_0) = P(t_0)x_0$, $t_0 \geq a$, hay

$$P(t_0)(x(t_0) - x_0) = 0, \; x_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{3.5}$$

Bổ đề 3.6. *Mọi nghiệm $u(t)$ của phương trình (3.3) xuất phát từ* im $P(t_0)$ *thì vẫn trong* im $P(t)$ *với mọi $t \in \mathbb{T}_{t_0}$.*

Chứng minh Thật vậy, nhân hai vế của phương trình (3.3) với Q_σ ta được $Q_\sigma u^\Delta = Q_\sigma P^\Delta u$. Từ đó suy ra $(Qu)^\Delta = Q^\Delta Qu$. Vậy, nếu $Q(t_0)u(t_0) = 0$ thì $Q(t)u(t) = 0$ với mọi $t \in \mathbb{T}_{t_0}$. Do đó $u(t) = P(t)u(t)$ hay $u(t) \in \operatorname{im} P(t)$. Ta có điều cần chứng minh. Giả sử $\Phi(t,s)$ là toán tử Cauchy sinh ra bởi hệ thuần nhất

$$E_\sigma(t)x^\Delta(t) = A(t)x(t). \tag{3.6}$$

Khi đó với mọi $t \geq s \geq a$, ta có

$$\begin{cases} E_\sigma(t)\Phi^\Delta(t,s) = A(t)\Phi(t,s), \\ P(s)(\Phi(s,s) - I) = 0. \end{cases}$$

Gọi $\Phi_0(t,s)$ là toán tử Cauchy của (3.3)

$$\Phi_0^\Delta(t,s) = (P^\Delta + P_\sigma G^{-1}\overline{A}(t))\Phi_0(t,s), \tag{3.7}$$

với $\Phi_0(s,s) = I$. Từ (3.3) và (3.4), ta có

$$\Phi(t,s) = \widetilde{P}(t)\Phi_0(t,s)P(s), \tag{3.8}$$

với $\widetilde{P} = I + TQ_\sigma G^{-1}\overline{A}$.

Ký hiệu $x(\cdot, t_0, x_0)$ là nghiệm duy nhất của hệ (3.1) với điều kiện đầu

$$P(x(t_0, t_0, x_0) - x_0) = 0. \tag{3.9}$$

Theo công thức biến thiên hằng số ta có

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t,t_0)P(t_0)x_0 \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\sigma(s))P_\sigma(s)G^{-1}(s)q(s)\Delta s \\ &\quad + T(t)Q_\sigma(t)G^{-1}(t)q(t). \end{aligned} \tag{3.10}$$

4 Định lý kiểu Bohl-Perron cho hệ động lực ẩn

Mục đích của nội dung này là chứng minh định lý Bohl-Perron cho hệ động lực ẩn tuyến tính. Ở đó ta xem xét mối quan hệ giữa tính bị chặn của nghiệm của phương trình (3.1) với tính ổn định của phương trình thuần nhất tương ứng (3.6).

Theo cách giải phương trình (3.1), ta thấy hàm q được tách thành hai thành phần $P_\sigma G^{-1}q$ và $TQ_\sigma G^{-1}q$. Do đó, với bất kỳ $t_0 \in \mathbb{T}_a$ ta xét q như là một phần tử của tập hợp

$$\begin{aligned} L(t_0) = \{q \in C\left([t_0, \infty], \mathbb{R}^n\right) : & \\ \sup_{t \geq t_0} \|T(t)Q_\sigma(t)G^{-1}(t)q(t)\| < \infty & \\ \text{and } \sup_{t \geq t_0} \|P_\sigma(t)G^{-1}(t)q(t)\| < \infty\}. & \end{aligned}$$

Dễ thấy $L(t_0)$ là một không gian Banach với chuẩn

$$\begin{aligned} \|q\| = \sup_{t \geq t_0} \big(&\|P_\sigma(t)G^{-1}(t)q(t)\| \\ &+ \|T(t)Q_\sigma(t)G^{-1}(t)q(t)\|\big). \end{aligned}$$

Giả sử $x(t,s,q)$ là nghiệm của phương trình (3.1) kết hợp với $q(t)$ và có điều kiện đầu $P(s)x(s,s) = 0$. Để đơn giản, ta có thể viết $x(t,s)$ hoặc $x(t)$ thay vì $x(t,s,q)$.

Bổ đề 4.1. *Nếu với mọi hàm $q(\cdot) \in L(t_0)$, nghiệm $x(\cdot, t_0)$ của bài toán Cauchy (3.1) với điều kiện ban đầu $P(t_0)x(t_0,t_0) = 0$ bị chặn, khi đó với mọi $t_1 \geq t_0$, tồn tại $k > 0$, không phụ thuộc vào t_1, sao cho*

$$\sup_{t \geq t_1} \|x(t,t_1)\| \leq k\|q\|. \tag{4.1}$$

Chứng minh

Trước hết ta định nghĩa họ toán tử $\{V_t\}_{t \geq t_0}$ như sau

$$\begin{aligned} V_t : L(t_0) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ q &\longmapsto V_t(q) = x(t,t_0). \end{aligned}$$

Theo giả thiết của bổ đề, ta có $\sup_{t\geq t_0}\|V_t q\| < \infty$ với mọi $q \in L(t_0)$. Sử dụng nguyên lý bị chặn đều, tồn tại hằng số $k > 0$ sao cho

$$\sup_{t\geq t_0}\|x(t,t_0)\| = \|V_t q\| \leq k\|q\|, \tag{4.2}$$

với mọi $t \geq t_0$. Gọi q là một hàm cho trước thuộc $L(t_1)$, ta xây dựng hàm $\overline{q}$ như sau:

$$\overline{q}_t = 0, \text{ nếu } t < t_1 \text{ và } \overline{q}(t) = q(t) \text{ nếu } t \geq t_1.$$

Dễ thấy $q(t) \in L(t_0)$. Theo công thức biến thiên hằng số, với mọi $t \geq t_1$, ta có

$$\begin{aligned} x(t,t_0,\overline{q}) &= \int_{t_0}^{t}\Phi(t,\sigma(\tau))P_\sigma(\tau)G^{-1}(\tau)\overline{q}(\tau)d\tau \\ &\quad + T(t)Q_\sigma(t)G^{-1}(t)\overline{q}(t) \\ &= \int_{t_1}^{t}\Phi(t,\sigma(\tau))P_\sigma(\tau)G^{-1}(\tau)q(\tau)d\tau \\ &\quad + T(t)Q_\sigma(t)G^{-1}(t)q(t). \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $x(t,t_0,\overline{q}) = x(t,t_1,q)$ với mọi $t \geq t_1$. Kết hợp với (4.2) ta nhận được

$$\begin{aligned} \sup_{t\geq t_1}\|x(t,t_1,q)\| &= \sup_{t\geq t_0}\|x(t,t_0,\overline{q})\| \\ &\leq k\|\overline{q}\| = k\|q\|. \end{aligned}$$

Định lý được chứng minh.

Định lý 4.2. *Mọi nghiệm của bài toán Cauchy (3.1) với liên kết $q \in L(t_0)$ và điều kiện ban đầu $P(t_0)x(t_0) = 0$, là bị chặn, khi và chỉ khi phương trình động lực ẩn chỉ số một (3.6) là ổn định mũ.*

Chứng minh

Điều kiện cần. Trước hết, ta chứng minh nếu mọi nghiệm của phương trình (3.1) với điều kiện ban đầu $P(t_0)x(t_0) = 0$, với liên kết $q \in L(t_0)$, là bị chặn thì phương trình (3.6) sẽ ổn định mũ.

Lấy giá trị bất kỳ $t_1 \geq t_0$, đặt $\chi(t) = \|\Phi(\sigma(t),t_1)\|$, $t \geq t_1$. Khi đó với bất kỳ $y \in \mathbb{R}^n$, ta xét hàm số

$$q(t) = \frac{E_\sigma(t)\Phi(\sigma(t),t_1)y}{\chi(t)},\ t \geq t_1.$$

Dễ dàng chỉ ra được

$$P_\sigma(t)G^{-1}(t)q(t) = P_\sigma(t)\frac{\Phi(\sigma(t),t_1)}{\chi(t)}y,$$

suy ra

$$\begin{aligned} &\|T(t)Q_\sigma(t)G^{-1}(t)q(t) = 0\|, \\ &\|P_\sigma(t)G^{-1}(t)q(t)\| \leq K_0\|y\|. \end{aligned}$$

Vậy, $q \in L(t_1)$ và

$$\begin{aligned} \|q\| = &\sup_{t\geq t_1}\big(\|P_\sigma(t)G^{-1}(t)q(t)\| \\ &+ \|T(t)Q_\sigma(t)G^{-1}(t)q(t)\|\big) \leq K_0\|y\|. \end{aligned}$$

Hơn nữa,

$$\begin{aligned} x(t,t_1) &= \int_{t_1}^{t}\Phi(t,\sigma(\tau))P_\sigma(\tau)G^{-1}(\tau)q(\tau)\Delta\tau \\ &\quad + T(t)Q_\sigma(t)G^{-1}(t)q(t) \\ &= \int_{t_1}^{t}\Phi(t,\sigma(\tau))P_\sigma(\tau)\frac{\Phi(\sigma(\tau),t_1)y}{\chi(\tau)}\Delta\tau \\ &= \int_{t_1}^{t}\frac{\Phi(t,t_1)y}{\chi(\tau)}\Delta\tau. \end{aligned}$$

Đặt $\Psi(t) = \int_{t_1}^{t}\frac{1}{\chi(\tau)}\Delta\tau > 0$, ta có

$$x(t,t_1) = \Phi(t,t_1)\Psi(t)y. \tag{4.3}$$

Theo Bổ đề 4.1, ta nhận được

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &= \|\Phi(t,t_1)\Psi(t)y\| \\ &= \|\Phi(t,t_1)y\|\Psi(t) \leq k\|q\| \leq kK_0\|y\|, \end{aligned}$$

từ đó suy ra

$$\|\Phi(t,t_1)\| \leq \frac{\overline{k}}{\Psi(t)}, \tag{4.4}$$

ở đó $\overline{k} = kK_0$. Mặt khác,

$$\frac{1}{\Psi^\Delta(t)} = \chi(t) = \|\Phi(\sigma(t),t_1)\| \leq \frac{\overline{k}}{\Psi(\sigma(t))}.$$

Hay

$$\Psi^{\Delta}(t) \geq \frac{1}{\overline{\overline{k}}}\Psi(\sigma(t)).$$

Khi đó, ta nhận được

$$\Psi(t) \geq \Psi(c)e_{\ominus\left(-\frac{1}{\overline{\overline{k}}}\right)}(t,c),$$

với mọi $t \geq c$. Do vậy, theo (4.4) ta có

$$\|\Phi(\sigma(t),t_1)\| \leq \frac{\overline{k}}{\Psi(c)}e_{-\frac{1}{\overline{\overline{k}}}}(\sigma(t),c).$$

với mọi $t \geq c$. Do đó, với mọi $t > c$ thì

$$\begin{aligned}\|\Phi(t,t_1)\| &\leq \frac{\overline{k}}{\Psi(c)}e_{-\frac{1}{\overline{\overline{k}}}}(t,c)\\ &= \frac{\overline{k}}{\Psi(c)e_{-\frac{1}{\overline{\overline{k}}}}(c,t_1)}e_{-\frac{1}{\overline{\overline{k}}}}(t,t_1).\end{aligned}$$

Đặt $\alpha = \frac{1}{\overline{\overline{k}}}$, $N_1 = \frac{\overline{k}}{\Psi(c)e_{-\frac{1}{\overline{\overline{k}}}}(c,t_1)}$ và

$$N = \max\left\{N_1, \max_{t_1\leq t\leq c}\frac{\|\Phi(t,t_1)\|}{e_{-\alpha}(t,t_1)}\right\},$$

ta nhận được điều cần chứng minh

$$\|\Phi(t,t_1)\| \leq Ne_{-\alpha}(t,t_1) \quad \text{for} \quad t \geq t_1.$$

Điều kiện đủ. Để chứng minh điều kiện cần, ta sẽ chỉ ra rằng nếu (3.6) ổn định mũ thì tất cả các nghiệm của bài toán Cauchy (3.1) với điều kiện ban đầu $P(t_0)x(t_0) = 0$, với liên kết $q(t)$ trong $L(t_0)$ là bị chặn.

Với $q \in L(t_0)$, ta giả sử

$$\sup_{t\geq t_0}\|P_\sigma(t)G^{-1}(t)q(t)\| = C_1,$$
$$\sup_{t\geq t_0}\|T(t)Q_\sigma(t)G^{-1}(t)q(t)\| = C_2.$$

Sử dụng công thức (3.10), ta được

$$\begin{aligned}\|x(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t}\|\Phi(t,\sigma(\tau))P_\sigma G^{-1}q(\tau)\|\Delta\tau\\ &\quad+\|TQ_\sigma G^{-1}q(t)\|\\ &\leq MC_1\int_{t_0}^{t}e_{-\alpha}(t,\sigma(\tau))\Delta\tau + C_2.\end{aligned}$$

Vì $e_{-\alpha}(t,\sigma(\tau)) = e_{-\alpha}(t,t_0)e_{\ominus(-\alpha)}(\sigma(\tau),t_0)$, ta suy ra

$$\|x(t)\| \leq MC_1e_{-\alpha}(t,t_0)\int_{t_0}^{t}e_{\ominus(-\alpha)}(\sigma(\tau),t_0)\Delta\tau + C_2.$$

Theo quy tắc L'Hôspital áp dụng cho thang thời gian ta có

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty}e_{-\alpha}(t,t_0)\int_{t_0}^{t}e_{\ominus(-\alpha)}(\sigma(\tau),t_0)\Delta\tau\\ &\quad= \lim_{t\to\infty}\frac{\int_{t_0}^{t}e_{\ominus(-\alpha)}(\sigma(\tau),t_0)\Delta\tau}{e_{\ominus(-\alpha)}(t,t_0)}\\ &\quad= \lim_{t\to\infty}\frac{e_{\ominus(-\alpha)}(\sigma(t),t_0)}{\ominus(-\alpha)e_{\ominus(-\alpha)}(t,t_0)} = \frac{1}{\alpha}.\end{aligned}$$

Do đó, $\sup_{t\geq t_0}\int_{t_0}^{t}e_{-\alpha}(t,\sigma(\tau))\Delta\tau < \infty$, hay tồn tại hằng số $M_1 > 0$ sao cho

$$\|x(t)\| \leq MC_1M_1 + C_2.$$

Vậy, nghiệm của phương trình (3.1) là bị chặn. Ta có điều cần chứng minh.

5 Kết luận

Dựa trên các kết quả đã có về định lý ổn định dạng Bohl-Perron cho phương trình sai phân ẩn và phương trình vi phân đại số, trong bài báo này, chúng tôi đã đưa ra định lý Bohl-Perron cho các phương trình động ẩn tuyến tính. Một số bài toán mở được đặt ra sau khi hoàn thành đó là mở rộng định lý trên cho lớp các phương trình ẩn dạng phức tạp hơn.

Tài liệu tham khảo

[1]. B. Aulbach, N.V. Minh, "The concept of spectral dichotomy for linear difference equations II", *J. Differ.Equ. Appl.*, 2, pp. 251–262, 1996.

[2]. L. Berezansky, E. Braverman, "On exponential dichotomy, Bohl-Perron type theorems and stability of difference equations", *J. Math. Anal. Appl.*, 304, pp. 511-530, 2005.

[3]. M. Bohner and A. Peterson, Advances in Dynamic Equations on Time Scales, Birkhäuser, Boston, 2003.

[4]. E. Braverman, I.M. Karabash, "Bohl–Perron type stability theorems for linear difference equations with infinite delay", *J. Differ. Equ. Appl.*, 18, pp. 909-939, 2012.

[5]. N.H. Du, T.K. Duy and V.T. Viet, "Degenerate cocycle with index-1 and Lyapunov exponent", *Stochatics and Dynamics*, 7(2)(2007), pp. 229-245, 2007.

[6]. N.H. Du, V.H. Linh and N.T.T. Nga, "On stability and Bohl exponent of linear singular systems of difference equations with variable coefficients", *J. Differ. Equ. Appl.*, 22 (2016), pp. 1350-1377, 2016.

[7]. V.H. Linh, N.T.T. Nga, "Bohl-Perron Type Stability Theorems for Linear Singular Difference Equations", *Vietnam Journal of Mathematics*, 46 (2018), pp. 437-451, 2018.

[8]. M. Pituk, "A criterion for the exponential stability of linear difference equations", *Appl. Math. Lett.*, 17, pp. 779-783, 2004.